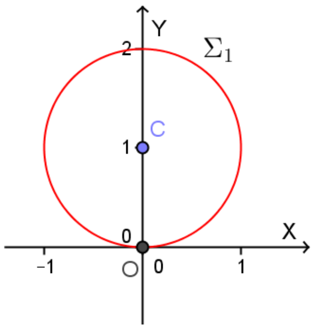
Calendario Boreale 1 (EUROPA) 2014

PROBLEMA 1

La circonferenza Σ_1 di centro C e raggio a=1, appartiene al semipiano delle y positive ed è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento.

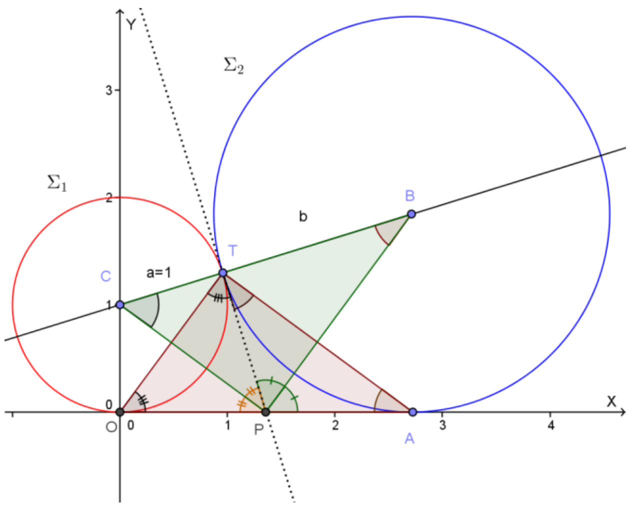


Σ_1 *ha equazione:* $x^2 + (y-1)^2 = 1 \implies x^2 + y^2 - 2y = 0$

1)

Da un punto P dell'asse x , distinto da O, si conduca l'ulteriore tangente a Σ_1 e si indichi con T il punto di tangenza. Successivamente, si consideri la circonferenza Σ_2 tangente esternamente a Σ_1 nel punto T e tangente altresì all'asse x in un punto A; si denoti con B il centro di Σ_2 e con b il suo raggio. Si dimostri che i triangoli OTA e CPB sono entrambi rettangoli e che
$OP^2 = ab$.

Notiamo che, essendo PT e PA tangenti alla circonferenza Σ_2, gli angoli BPA e BPT sono congruenti; analogamente sono congruenti gli angoli CPO e CPT. Segue che l'angolo CPB è retto.
Siccome PC è perpendicolare ad OT e PB è perpendicolare ad AT segue che anche OAT è retto.
Gli angoli TBP e PAT sono congruenti perché complementari degli angoli congruenti TPB e APB.
I triangoli OTA e CPB, essendo rettangoli ed avendo gli angolo acuti TAO e PBC congruenti, sono quindi simili.



Siccome OP=PT e PT è altezza relativa all'ipotenusa BC del triangolo BPC, per il secondo teorema di Euclide si ha: $OP^2 = PT^2 = CT \cdot TB = ab$.

2)

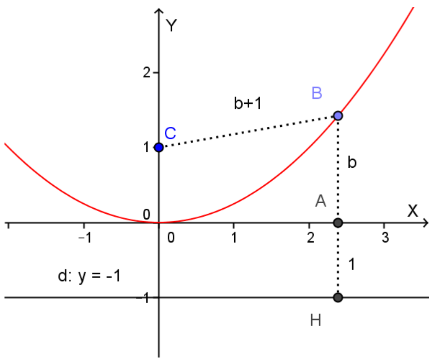
Qual è il luogo geometrico descritto da B al variare di P sull'asse x ?

Detta t l'ascissa di P, essendo $OP^2 = ab$, risulta $t^2 = b = TB = BA = y_B$
Inoltre l'ascissa di B è uguale all'ascissa di A ed $x_A = 2t$ (ricordiamo che PA=PT=PO)
Quindi il luogo descritto da B ha equazioni parametriche:

$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases} \implies y = \frac{1}{4}x^2$ (luogo descritto da B al variare di P sull'asse x)

N.B.

Il luogo descritto da B si può trovare geometricamente nel seguente modo:
siccome BC=1+b ed BA=b, considerando la retta di equazione d: y = -1, B ha da tale retta distanza b+1: quindi B è equidistante da C e da d, pertanto è la parabola di fuoco C e direttrice d (la cui equazione è appunto $y = \frac{1}{4}x^2$).



3)

Sia $f(x) = |x|(x^2 + 1)$. Si mostri che $f(x)$ esprime l'area S del quadrilatero OABC in funzione dell'ascissa x di P.

L'area richiesta è data da:

$$Area(OABC) = \frac{(OC + AB) \cdot OA}{2} = \frac{(1 + b) \cdot (|2x|)}{2} = \frac{(1 + x^2) \cdot (|2x|)}{2} = |x|(x^2 + 1) = f(x)$$

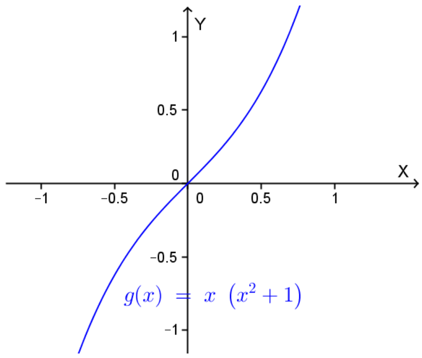
4)

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico Γ ***di f(x)*** *e dalle rette di equazione $y = x$ e $y = -x + 3$.*

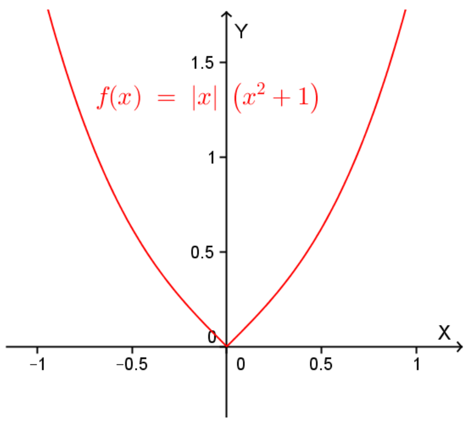
Studiamo sommariamente la funzione f(x); a tale scopo è sufficiente studiare la funzione $g(x) = x(x^2 + 1)$ poiché $f(x) = g(|x|)$, quindi il grafico di f si ottiene dal grafico di g confermandone la parte a destra dell'asse y e ribaltando tale parte rispetto all'asse y stesso.

$g(x) = x(x^2 + 1)$

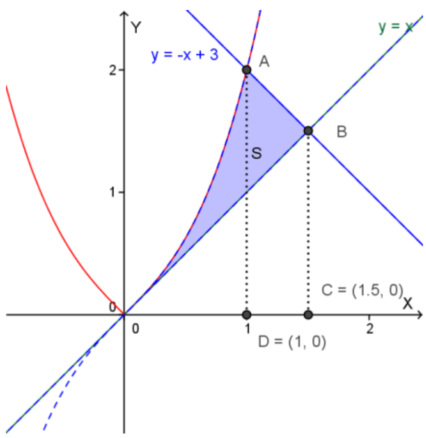
Si tratta di una cubica che taglia gli assi cartesiani nell'origine, rispetto a cui è simmetrica; i limiti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $\pm\infty$.
Risulta: $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x$: la funzione è sempre crescente.
$g''^{(x)} = 6x > 0 \quad per\ x > 0$: concavità verso l'alto per x>0, flesso in (0,0).
Il grafico di g(x) è quindi il seguente:



Il grafico di $y = f(x) = g(|x|) = |x|(x^2 + 1)$ è il seguente:



Rappresentiamo regione finita di piano delimitata dal grafico Γ di f(x) e dalle rette di equazione $y = x$ e $y = -x + 3$ (notiamo che $y = x$ è tangente in O a Γ, come si deduce analizzando la derivata di f)



Dopo aver trovato l'intersezione $A=(1;2)$ tra $f(x)$ e $y=-x+3$ e l'intersezione

$B=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ tra $f(x)$ e $y=x$, l'area della regione S richiesta è data da:

$$Area(S)=\int_0^1 (x^3+x-x)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(-x+3-x))dx=\int_0^1 (x^3)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3))dx=$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+[-x^2+3x]_1^{3/2}=\frac{1}{4}+\left[-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-(-1+3)\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri