Calendario Boreale 1 (EUROPA) 2014

PROBLEMA 2

Si consideri, in un riferimento cartesiano Oxy , la funzione

$$f(x) = x(x-1)(x-k), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

1)

Si dica come varia il grafico di $f(x)$ al variare di k $(k \leq 0, \quad 0 < k \leq 1, \quad k \geq 1)$.

$$f(x) = x(x-1)(x-k) = (x^2-x)(x-k) = x^3 - kx^2 - x^2 + kx = x^3 - (k+1)x^2 + kx$$

Dominio: $-\infty < x < +\infty$
Intersezioni con gli assi cartesiani:
$x = 0 \;\; y = 0$
$y = 0 \;\; x = 0,1,k$
Limiti:
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (non esistono asintoti obliqui, trattandosi di una cubica).
Derivata prima:
$f'(x) = 3x^2 - 2(k+1)x + k = 0 \quad se$

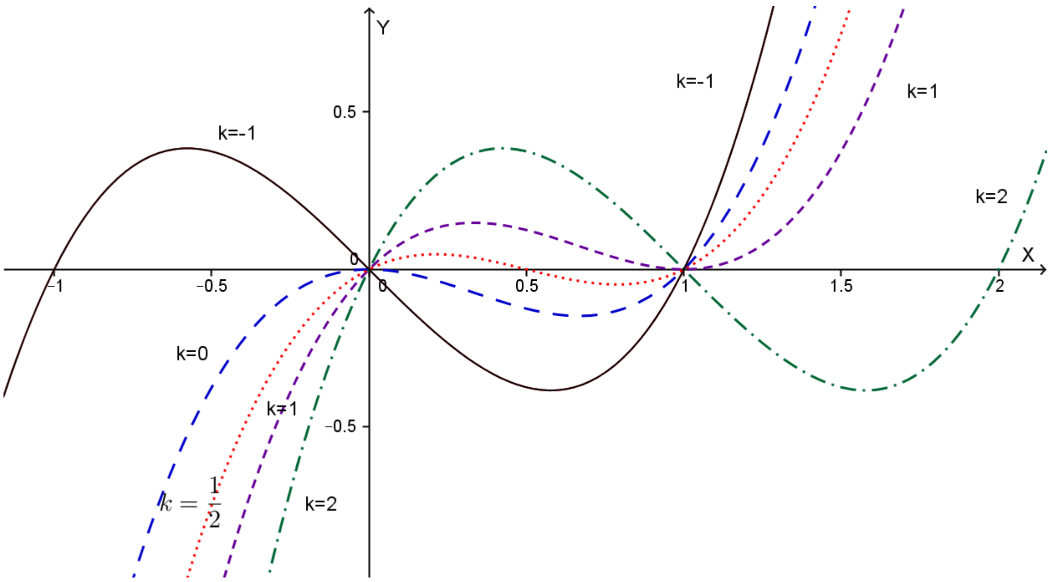
$3x^2 - 2(k+1)x + k = 0 \;\; \frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - 3k = k^2 - k + 1 > 0 \;\; \forall k$
$x = \frac{-k-1\pm\sqrt{k^2-k+1}}{3}$;
$f'(x) > 0 \quad se \quad x < \frac{-k-1-\sqrt{k^2-k+1}}{3} = x_1$ oppure $x > \frac{-k-1+\sqrt{k^2-k+1}}{3} = x_2$

Quindi, $\forall k$, la funzione è crescente per $x < x_1$ oppure $x > x_2$ e pertanto avremo un massimo relativo in x_1 ed un minimo relativo in x_2 .

Derivata seconda:

$f''(x) = 6x - 2(k+1) > 0 \quad se \quad x > \frac{k+1}{3}$.
Avremo quindi, $\forall k$, la concavità verso l'alto per $x > \frac{k+1}{3}$ e verso il basso per $x < \frac{k+1}{3}$: flesso in $x = \frac{k+1}{3}$.

Grafico della funzione (per k=-1, k=0, k=1/2, k=1, k=2)

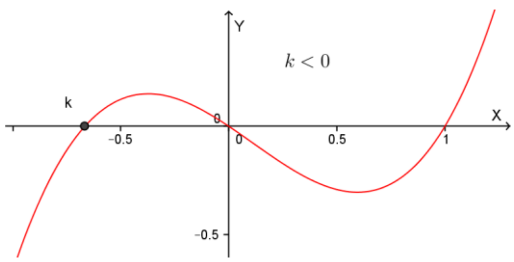


2)

Per quali valori di k le due regioni delimitate dal grafico di $f(x)$e dall'asse x (una posta al di sopra, l'altra al di sotto dell'asse x) hanno aree uguali?

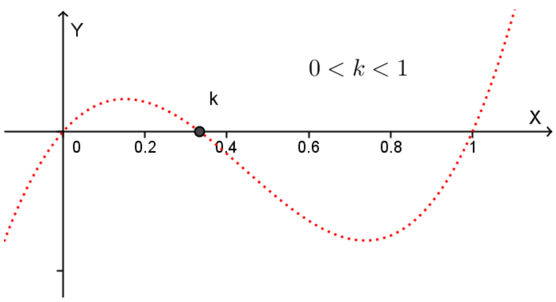
Dai grafici precedenti deduciamo che si hanno due regioni solo per k<0 0<k<1 k>1
(cioè se $k \neq 0{,}1$).
Le due aree saranno uguali quando:

1) **Se k<0**



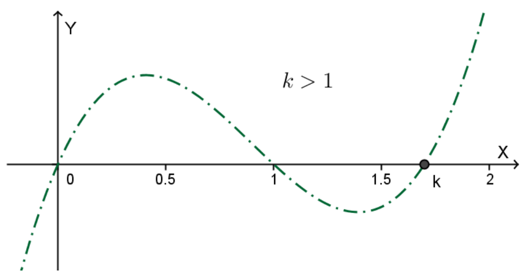
$\int_k^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ da cui, per simmetria rispetto al flesso, di ascissa $x = 0$, $\boldsymbol{k = -1}$

2) **0<k<1**



$\int_0^k f(x)dx = \int_k^1 f(x)dx$ da cui, per simmetria rispetto al flesso, di ascissa $x = \frac{k+1}{3} = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$

3) **k>1**:



$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^k f(x)dx$ da cui, per simmetria rispetto al flesso, di ascissa $x = \frac{k+1}{3} = 1$,

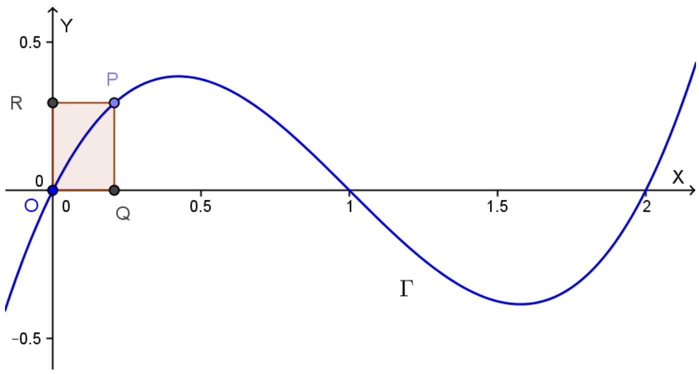
$\boldsymbol{k = 2}$

3)

Si ponga $k = 2$ e sia Γ il grafico corrispondente. Preso un punto P di Γ avente ascissa compresa tra 0 e 1, si indichino con Q e R le proiezioni ortogonali di P rispettivamente sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate. L'area e il perimetro del rettangolo OQPR ammettono entrambi un valore massimo?

$f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Il suo grafico Γ è il seguente:

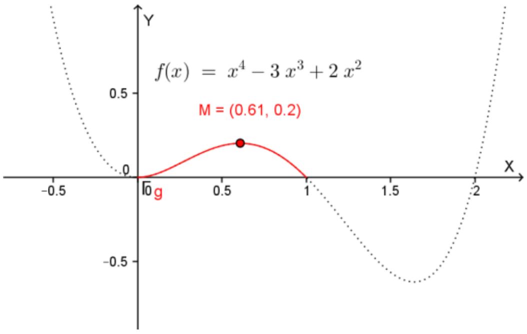


Le coordinate dei vertici del rettangolo sono:

$P = (x, x^3 - 3x^2 + 2x)$, con $0 < x < 1$
$Q = (x, 0), \quad P = (0, x^3 - 3x^2 + 2x), \quad O = (0,0)$

$Area(OQPR) = S = OQ \cdot QP = x(x^3 - 3x^2 + 2x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$
$S' = 4x^3 - 9x^2 + 4x = x(4x^2 - 9x + 4) \geq 0 \quad se \quad 4x^2 - 9x + 4 \geq 0$ (essendo x>0)
$0 < x \leq \frac{9-\sqrt{17}}{8} \; o \; x \geq \frac{\sqrt{17}+9}{8} > 1$: funzione crescente.

Quindi l'area è massima se $x = \frac{9-\sqrt{17}}{8} \cong 0.6$



Analizziamo ora il perimetro del rettangolo.

$2p(OQPR) = 2 \cdot (OQ + OR) = \max \quad se\ lo$ è :

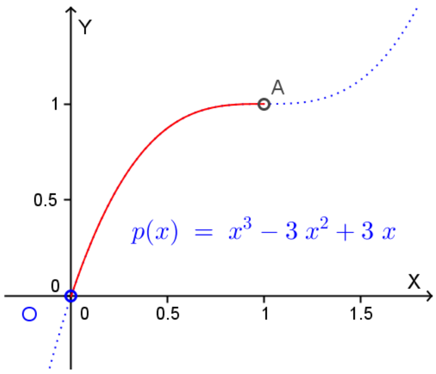
$p = OQ + OR = x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x^2 + 3x \qquad (0 < x < 1)$

$p' = 3x^2 - 6x + 3 \geq 0 \quad se \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq 0$: funzione sempre crescente.

Quindi se $0 < x < 1$ il perimetro non ammette massimo.

N.B. Se fosse $0 \leq x \leq 1$ il perimetro sarebbe massimo per x=1 (il rettangolo degenera in un segmento).

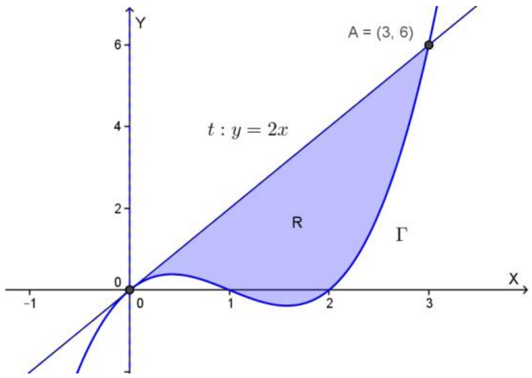


4)

Sia R la regione finita delimitata da Γ e dalla retta t tangente a Γ nell'origine O. Si consideri il solido W di base R, le cui sezioni con piani ortogonali all'asse delle ascisse sono tutti semicerchi i cui diametri hanno gli estremi uno su t l'altro su Γ. Qual è l'altezza massima del solido W? Si calcoli il volume di W.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

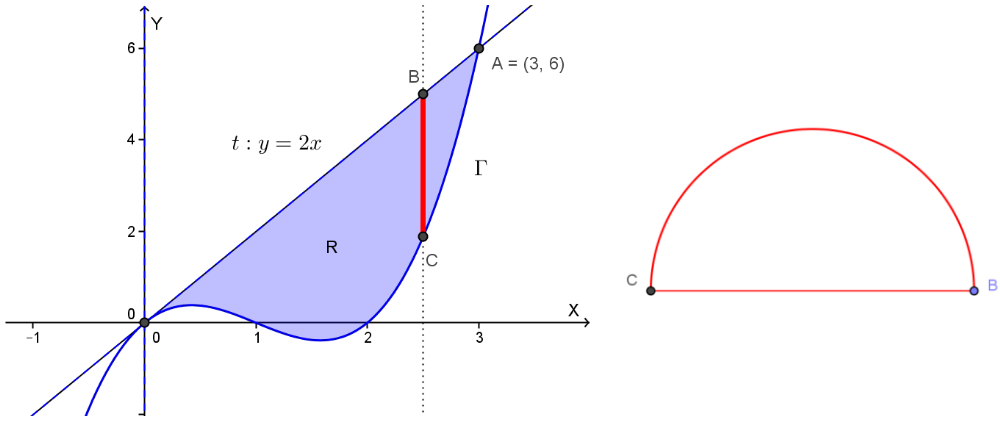
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \ , \qquad f'(0) = 2 \ , \qquad t: \ y = 2x$



Il solido W può essere visto come somma di infiniti semicerchi, la cui area è:

$$S(x) = \frac{1}{2}(\pi R^2) = \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{8}(y_B - y_c)^2 = \frac{\pi}{8}\left(2x - (x^3 - 3x^2 + 2x)\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(-x^3 + 3x^2)^2 = S(x) \quad con \quad 0 \leq x \leq 3$$



L'altezza del solido W è il raggio della semicirconferenza di diametro BC, quindi:

$h(W) = \frac{BC}{2} = \frac{-x^3+3x^2}{2}$ con $con \quad 0 \leq x \leq 3$

Dobbiamo trovare h massima.

$h' = \dfrac{-3x^2 + 6x}{2} \geq 0\,, \quad x^2 - 2x \leq 0\,, \quad 0 \leq x \leq 2$

Quindi h è crescente in $0 \leq x < 2$ e decrescente in $2 < x \leq 3$:

h è massima per $x = 2$; $h(max) = h(2) = 2$

Calcoliamo ora il volume di W:

$$V(W) = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 \frac{\pi}{8}(-x^3 + 3x^2)^2\, dx = \frac{\pi}{8}\int_0^3 (x^6 - 6x^5 + 9x^4)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{x^7}{7} - x^6 + \frac{9}{5}x^5\right]_0^3 = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{729}{35} = \frac{729}{280}\,\pi \cong 8.179\, u^3 = V(W)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri