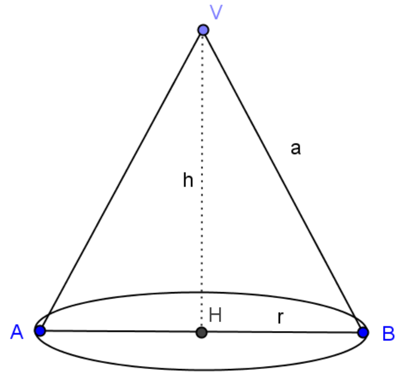
Calendario Boreale (EUROPA) 2014

QUESITO 1

Si determini, se esiste, un cono circolare retto tale che il suo volume e la sua superficie totale abbiano lo stesso valore numerico.



Indichiamo con **r** il raggio di base, con **a** l'apotema e con **h** l'altezza del cono (a>r, a>h)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S_t = \pi r^2 + \pi r a = \pi r(r+a)$$

$$V = S_t \quad se \quad \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r(r+a) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} rh = r + a \ \Longrightarrow \frac{1}{9} r^2 h^2 = (r + a\ )^2$$

Ma $h^2 = a^2 - r^2$, quindi, sostituendo nella relazione precedente:

$$\tfrac{1}{9} r^2(a^2 - r^2) = (a+r)^2 \Longrightarrow \ \tfrac{1}{9} r^2 (a-r)(a+r) = (a+r)^2 \ \Longrightarrow \ \tfrac{1}{9} r^2 (a-r) = a + r$$

$$r^2 a - r^3 = 9a + 9r \quad \Longrightarrow r^3 - ar^2 + 9r + 9a = 0$$

$$a(r^2 - 9) = r^3 + 9r \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{r^3 + 9r}{r^2 - 9}$$

Tale soluzione è accettabile se $r^2 - 9 > 0$ $\boldsymbol{r > 3}$ (deve essere $r > 0$) e se $a > r$ cioè:

$$\frac{r^3 + 9r}{r^2 - 9} > r \quad \Longrightarrow \quad r^3 + 9r > r^3 - 9r \quad \Longrightarrow \quad 18r > 0 \quad verificato\ se\ r > 0$$

Quindi esiste, un cono circolare retto tale che il suo volume e la sua superficie totale abbiano lo stesso valore numerico se il raggio di base $r > 3$ e l'apotema $a = \frac{r^3+9r}{r^2-9}$.

Ponendo per esempio se $r = 4$, *risulta:*

$$a = \frac{100}{7} \quad e\ h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{\frac{10000}{49} - 16} = \sqrt{\frac{9216}{49}} = \frac{96}{7} = h$$

Per tali valori di a, r ed h risulta:

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot \frac{96}{7} = \frac{512\,\pi}{7}$$

$$S_t = \pi \cdot 4\left(4 + \frac{100}{7}\right) = \frac{512\,\pi}{7}$$

QUESITO 2

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(sen\,3x)}{\ln(sen\,x)}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.
Poniamo $f(x) = \ln(sen\,3x)$ $\quad e \quad$ $g(x) = \ln(sen\,x))$
In un intorno destro di $x = 0$ le due funzioni sono continue e derivabili; valutiamo la derivata del denominatore:
$g'(x) = \frac{\cos x}{sen\,x}$ che non si annulla in un intorno destro di $x = 0$.
Possiamo quindi applica la regola di **de L'Hospital**.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{g}'(\mathrm{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3cos3x}{sen3x}}{\frac{cosx}{senx}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3cos3x}{sen3x} \cdot \frac{senx}{cosx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3senx}{sen3x} = 1$$

Quindi: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(sen\,3x)}{\ln(sen\,x)} = 1$

QUESITO 3

Si trovi un polinomio di terzo grado $p(x)$ *che si annulli per* $x = -3$ *e tale che la retta tangente alla curva* $y = p(x)$ *nel suo punto di ascissa zero abbia equazione* $2x + y - 6 = 0$ *.*

Sostituendo $x = 0$ nella tangente troviamo $y = 6$: quindi $p(x)$ passa per $(0; 6)$
Il coefficiente angolare della tangente è $m = -2$, quindi $p'(0) = -2$.
Annullandosi *per* $x = -3$ il polinomio può essere scritto nella forma:

$$p(x) = (x + 3)(ax^2 + bx + c)$$

Risulta: $p'(x) = (ax^2 + bx + c) + (x+3)(2ax + b)$

$p(0) = 6 \quad \Longrightarrow \quad 6 = 3c \quad \Longrightarrow \quad c = 2$

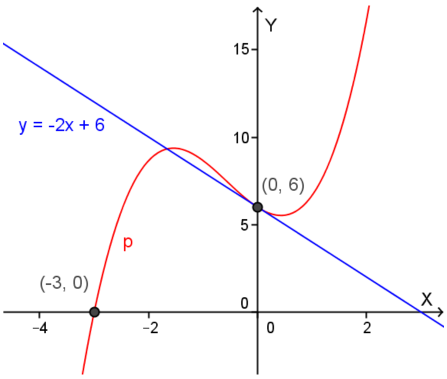
$p'(0) = -2 \quad \Longrightarrow \quad -2 = c + 3b \quad \Longrightarrow \quad 3b = -4 \;\Longrightarrow b = -\frac{4}{3}$

Risulta quindi:

$$p(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) = (x+3)\left(ax^2 - \frac{4}{3}x + 2\right)$$

Per esempio con $a = 1$ abbiamo il polinomio:

$p(x) = (x+3)\left(x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right)$



QUESITO 4

Lo sviluppo della potenza $(x^3 + y^k)^{20}$ *contiene il termine la cui parte letterale è:* $x^{21}y^{26}$*.*
Si trovi il valore di k .

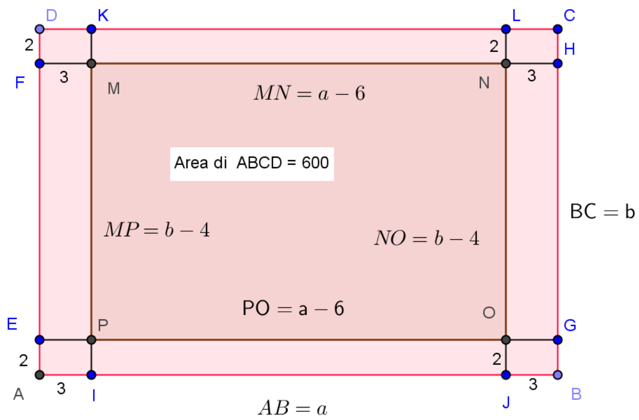
Risulta:

$$(x^3 + y^k)^{20} = \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} (x^3)^i (y^k)^{20-i} = \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} x^{3i} \cdot y^{20k - ki}$$

Il termine in $x^{21}y^{26}$ si ottiene se $3i = 21$ e $20k - ki = 26$, da cui $\boldsymbol{i = 7}$ **e** $\boldsymbol{k = 2}$**.**
Il coefficiente di $x^{21}y^{26}$ è dato da $\binom{20}{i} = \binom{20}{7} = 77520$.

QUESITO 5

Una targa d'argento ha la forma di un rettangolo di area $600\ cm^2$. La zona dove va incisa l'iscrizione è anch'essa rettangolare ed è posta a $2\ cm$ sia dal lato superiore sia dal lato inferiore della targa, lasciando inoltre un bordo di $3\ cm$ a sinistra e di $3\ cm$ a destra. Si determinino le dimensioni della targa in modo che sia massima l'area della zona dedicata all'incisione e si calcoli la percentuale dell'area totale da essa occupata.



Indichiamo con AB e CD le dimensioni della targa e poniamo:

$AB = a,\quad 0 < a < 600\quad e\quad BC = b,\ 0 < b < 600\qquad con\quad ab = 600\qquad \Longrightarrow\qquad b = \frac{600}{a}$

Indichiamo con PONM la zona dedicata all'incisione; sarà:

$PO = a - 6\qquad e\qquad PM = b - 4$

$$Area(incisione) = A(PONM) = S = (a-6)(b-4) = (a-6)\left(\frac{600}{a} - 4\right)$$

$S = (a-6)\left(\frac{600}{a} - 4\right)$ deve essere massima con $\quad 0 < a < 600$

$$S' = \left(\frac{600}{a} - 4\right) + (a-6)\left(-\frac{600}{a^2}\right) = -\frac{4\,(a-30)\,(a+30)}{a^2}$$

$$S' \geq 0 \quad se \quad a \leq 30$$

Quindi S cresce da 0 a 30 e decresce da 30 a 600: risulta quindi massima per $a = 30$ (quindi $b = 20$).

L'area d'incisione è massima quando le dimensioni della targa sono $30\ cm\quad e\quad 20\ cm$

L'area massima di incisione è pari a : $S(max) = 24\ cm \cdot 16\ cm = 384\ cm^2$

La percentuale occupata dall'area di incisione è data da : $\frac{384}{600} \cdot 100\ \% = 64\ \%$

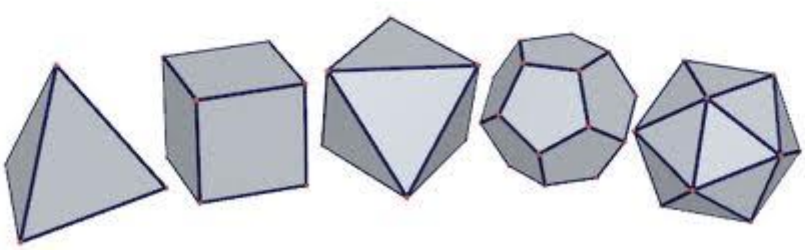
QUESITO 6

Si spieghi perché le facce di un poliedro regolare sono tutti triangoli, tutti quadrati o tutti pentagoni.

I poliedri regolari (**solidi platonici**) sono **5**, e le facce sono triangoli, quadrati o pentagoni.

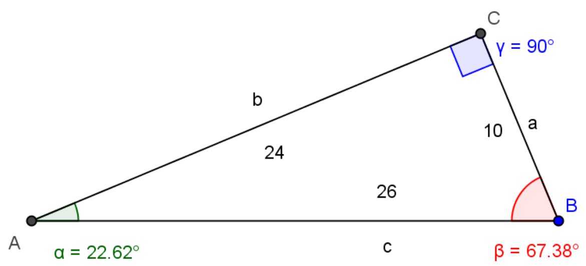
Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



QUESITO 7

Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli di un triangolo i cui lati misurano 10, 24 e 26 decimetri.



Poniamo $AB = c = 26\ dm, BC = a = 10\ dm$, $AC = b = 24\ dm$.

Poiché $c^2 = a^2 + b^2$ $(26^2 = 10^2 + 24^2)$,   il triangolo è rettangolo in C: $\gamma = 90°$

$b = c \cdot cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{24}{26} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arccos\left(\frac{24}{26}\right) \cong 22.62° = 22°37'$

$\beta = 90° - 22.62° = 67.38° = 67°23'$.

QUESITO 8

Siano x_1 e x_2 gli zeri di $P(x) = x^2 - x - 2014$, con $x_1 < x_2$. Siano x_3 e x_4 gli zeri di $Q(x) = x^2 - 2x - 2014$ con $x_3 < x_4$. Si calcoli $(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1)$.

Le equazioni $x^2 - x - 2014 = 0$ e $x^2 - 2x - 2014 = 0$, avendo il discriminante positivo, ammettono radici reali e distinte; ricordando che la somma delle radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è $-\frac{b}{a}$, abbiamo: $x_1 + x_2 = 1$, $x_3 + x_4 = 2$. Quindi:

$$(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1) = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = 2 - 1 = 1$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri