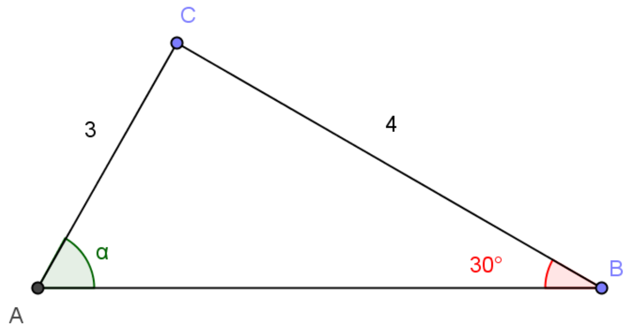
# LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2014

## QUESITO 1




Per il teorema dei seni risulta: $\frac{4}{sen\,\alpha}=\frac{3}{sen\,30°}$ da cui $sen\,\alpha=\frac{2}{3}$

Quindi $\alpha=arcsen\left(\frac{2}{3}\right)$ che porta alle due soluzioni:

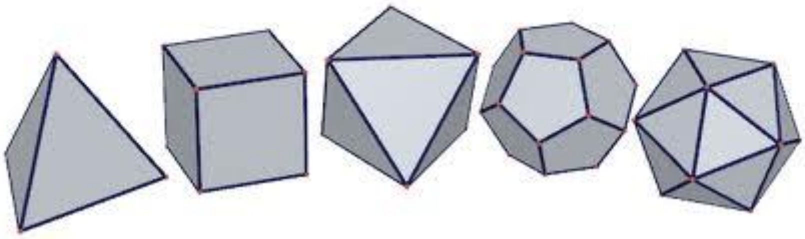
$\alpha_1\cong 41{,}810°\cong 41°49'$ $\alpha_2\cong 138°11'$

## QUESITO 2

I poliedri regolari (**solidi platonici**) sono **5**, e tra essi **non ce ne sono a facce esagonali**.
Poiché in ogni vertice di un poliedro devono convergere almeno tre facce (non complanari), la somma dei loro angoli deve essere inferiore ad un angolo giro.
Le facce possono essere solo triangoli equilateri (**tetraedro, ottaedro, icosaedro**), quadrati (**esaedro o cubo**), pentagoni regolari (**dodecaedro**).
Con tre facce esagonali avremmo come somma almeno 120°x3=360°, quindi **non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.**

Si hanno infatti le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli (equilateri): le facce degli angoloidi possono essere 3 (3x60°=180°<360°), 4 (4x60°=240°<360°), 5 (5x60°=300°<360°), ma non di più: con 6 facce avremmo 6x60°=360° che non è minore di 360°.
   Abbiamo quindi tre poliedri regolari con le facce triangolari: **il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.**
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 (3x90°=270°, ma 4x90°=360°): in questo caso si ha l'**esaedro (il cubo).**
3. Se le facce del poliedro sono pentagoni (regolari), ogni angoloide può avere al massimo 3 facce (3x108°=324°): in questo caso si ha il **dodecaedro regolare.**
4. Non possono esistere poliedri regolari le cui facce abbiamo più di 5 lati (per esempio già con l'esagono avremmo 3x120°=360°).



## QUESITO 3

*Quanti sono i numeri di 5 cifre con almeno una cifra dispari? Quanti quelli con almeno una cifra pari?*

I numeri di cinque cifre sono del tipo **abcde** con a che può assumere valori da 1 a 9 e b, c , d , e che possono assumere i valori da 0 a 9; tali numeri sono:

9x10x10x10x10=90000

Stabiliamo quanti di questi hanno tutte le cifre pari:
a= 2, 4, 6, 8
b, c, d, e = 0, 2, 4, 6, 8
Quindi i numeri di 5 cifre con tutte le cifre pari sono: 4x5x5x5x5=2500.
I numeri di 5 cifre con almeno una cifra dispari saranno quindi: 90000-2500=87500.

In modo analogo si ragiona per stabilire quanti sono i numeri di 5 cifre con almeno una cifra pari.

Stabiliamo quanti di questi hanno tutte le cifre dispari:
a, b, c, d, e= 1, 3, 5, 7, 9
Quindi i numeri di 5 cifre con tutte le cifre dispari sono: 5x5x5x5x5=3125.
I numeri di 5 cifre con almeno una cifra pari saranno quindi: 90000-3125=86875

## QUESITO 4

I casi possibili nel lancio di tre dadi sono 6x6x6=216.

I casi favorevoli che danno 9 sono

| dado 1 | dado 2 | dado 3 | n. casi |
|---|---|---|---|
| 1 | 2-3-4-5-6 | 6-5-4-3-2 | 5 |
| 2 | 1-2-3-4-5-6 | 6-5-4-3-2-1 | 6 |
| 3 | 1-2-3-4-5 | 5-4-3-2-1 | 5 |
| 4 | 1-2-3-4 | 4-3-2-1 | 4 |
| 5 | 1-2-3 | 3-2-1 | 3 |
| 6 | 1-2 | 2-1 | 2 |
| Totale casi favorevoli con somma 9 | | | 25 |

Quindi la probabilità di ottenere 9 è $\boldsymbol{p(9)} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{216}} \cong \mathbf{0.116} \cong \mathbf{11.6\%}$

I casi favorevoli che danno 10 sono

| dado 1 | dado 2 | dado 3 | n. casi |
|---|---|---|---|
| 1 | 3-4-5-6 | 6-5-4-3 | 4 |
| 2 | 2-3-4-5-6 | 6-5-4-3-2 | 5 |
| 3 | 1-2-3-4-5-6 | 6-5-4-3-2-1 | 6 |
| 4 | 1-2-3-4-5 | 5-4-3-2-1 | 5 |
| 5 | 1-2-3-4 | 4-3-2-1 | 4 |
| 6 | 1-2-3 | 3-2-1 | 3 |
| Totale casi favorevoli con somma 10 | | | 27 |

Quindi la probabilità di ottenere 10 è $\boldsymbol{p(10)} = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{216}} = \mathbf{0.125} \cong \mathbf{12.5\%}$
Quindi $\boldsymbol{p(9)} < \boldsymbol{p(10)}$.

## QUESITO 5

*Si determini l'equazione della tangente alla curva* $y = log_{\frac{1}{2}}(x)$ *condotta dal punto (0;1).*

$$y = f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x\ln(2)}$$

Dette $\left(t;\ -\frac{\ln(t)}{\ln(2)}\right)$, con $t > 0$ , le coordinate del generico punto della curva, la tangente in esso ha equazione:

$$y + \frac{\ln(t)}{\ln(2)} = -\frac{1}{t\ln(2)} \cdot (x - t)$$

Imponiamo che tale retta passi per il punto $(0; 1)$:

$$1 + \frac{\ln(t)}{\ln(2)} = -\frac{1}{t\ln(2)} \cdot (-t) \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\ln(t)}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \quad \Rightarrow \quad \ln(t) = 1 - \ln(2)$$

Quindi: $t = e^{1-\ln(2)} = e \cdot e^{-\ln(2)} = e.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e$

Pertanto la tangente uscente da $(0; 1)$ ha equazione:

$$y+\frac{1-\ln(2)}{\ln(2)}=-\frac{1}{\frac{1}{2}e\cdot\ln(2)}(x-1+\ln(2))$$

$$y+\frac{1}{\ln(2)}-1=-\frac{2}{e\cdot\ln(2)}\left(x-e^{1-\ln(2)}\right)$$

$$y=-\frac{2}{e\cdot\ln(2)}x+\frac{2\,e^{1-\ln(2)}}{e\cdot\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}+1$$

$$y=-\frac{2}{e\cdot\ln(2)}x+\frac{e}{e\cdot\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}+1$$

$$y=-\frac{2}{e\cdot\ln(2)}x+1$$

Il punto di tangenza T si ottiene da $\left(t;\ -\frac{\ln(t)}{\ln(2)}\right)\ con\ \ t=e^{1-\ln(2)}$ ed è:

$$T=\left(e^{1-\ln(2)};1-\frac{1}{\ln(2)}\right)=\left(\frac{1}{2}e;1-\frac{1}{\ln(2)}\right)$$

## QUESITO 6

*Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?*

Si tratta di trovare la minima superficie totale di parallelepipedo a base quadrata di dato volume.

Il volume del parallelepipedo è: $V=5\ litri=5\ dm^3$.
Indicando con a il lato del quadrato di base e con h l'altezza del parallelepipedo, si ha:

$V=a^2\cdot h=5$ e $S(totale)=(2a^2+2ah+2ah)=2\cdot(a^2+2ah)$

Ponendo a=x (con x>0) risulta $h=\frac{5}{x^2}$, quindi: $S(totale)=2\cdot\left(x^2+\frac{10}{x}\right)$
La superficie totale è minima quando lo è: $y=\left(x^2+\frac{10}{x}\right)$
$y'=2x-\frac{10}{x^2}\geq 0$ se $x^3-5\geq 0\ cioè\ per\ x\geq\sqrt[3]{5}$ ;
$y'<0\ per\ 0<x<\sqrt[3]{5}$
y, e quindi anche la superficie totale, è minima per $x=\sqrt[3]{5}$; per tale valore di x si ottiene $h=\frac{5}{x^2}=\sqrt[3]{5}$ (SI TRATTA QUINDI DI UN CUBO).

Quindi le dimensioni della lattina di superficie totale minima sono:

$lato\ di\ base = altezza = \sqrt[3]{5}\ dm = 171\ mm$

## QUESITO 7

**$f(x) = x^3$ , intervallo [0;k], valor medio = 9; k = ?**

Per il teorema della media il valore medio è dato da:

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_0^k x^3\ dx = \frac{1}{k}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^k = \frac{k^3}{4} = 9 \quad\Longrightarrow\quad k^3 = 36 \quad\Longrightarrow\quad k = \sqrt[3]{36}$$

## QUESITO 8

*Si provi che:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2014}}{2^x} = 0$$

Notiamo che $2^x$ è infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di x, quindi il limite richiesto è 0 (più esattamente $0^+$.

Verifica diretta. **Applichiamo la regola di de L'Hôpital**, di cui sono verificate le ipotesi (il limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, il numeratore ed il denominatore sono funzioni continue e derivabili in un intorno di +∞ e la derivata del denominatore non si annulla in tale intorno):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2014\cdot x^{2013}}{2^x\cdot ln2} = \left[F.I.\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Applicando ripetutamente la regola di de L'Hôpital, abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2014!}{2^x\cdot(ln2)^{2014}} = 0^+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2014}}{2^x}$$

**N.B.**

Il limite può essere visto nella forma

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2014}}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{x}{2014}}}\right)^{2014}$$

e applicare una sola volta la regola di de L'Hôpital al $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^{\frac{x}{2014}}}$.

## QUESITO 9

*Si determini il dominio della funzione:*

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3 - log_2(x+5)}}$$

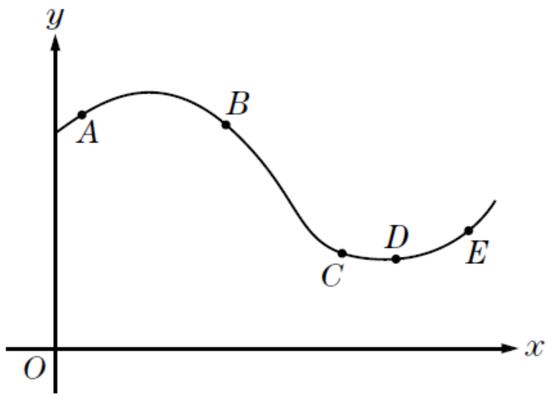
Dominio della funzione:

$$\begin{cases} x+5>0 \\ 3-log_2(x+5)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ log_2(x+5)\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ (x+5)\leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x\leq 3 \end{cases}$$

Quindi il dominio della funzione è: $\boldsymbol{-5 < x \leq 3}$

## QUESITO 10

*Nella figura a lato è riportato il grafico della funzione $y = f(x)$. In quale o quali dei cinque punti A, B, C, D, E la derivata prima e la derivata seconda della funzione sono entrambe negative?*




La derivata seconda è negativa in A e B (concavità verso il basso); la derivata prima è negativa in B (funzione decrescente). Quindi:

La derivata prima e la derivata seconda sono entrambe negative in B.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri