LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2014 - PROBLEMA 2

Sia $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 12}$

1)

Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ *ha una sola radice* α tale che $1 < \alpha < 2$.

La funzione è continua su tutto R, quindi in particolare loè nell'intervallo chiuso e limitato [1;2].
I valori assunti agli estremi di tale intervallo sono:

$f(1) = -4 < 0$ $\quad f(2) = 16 > 0$: discordi.

Per il **Teorema degli zeri** quindi la funzione ammette nell'intervallo dato almeno uno zero. Per dimostrare che la soluzione in tale intervallo è unica studiamo il segno della derivata prima:

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 > 0,\ \Delta < 0$ quindi $f'(x) > 0\ \ \forall x$, pertanto la funzione è sempre crescente: la radice è unica.

2)

Si verifichi che l'espressione: $x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ *equivale a* $f(x) = 0$.

$x^3 + 3x^2 + 4x - 12 = 0, \qquad x^2(x+3) = 4(3-x),$

$x^2 = \dfrac{4(3-x)}{x+3} \quad (x \neq -3, verificato\ nell'intervallo\ della\ radice)$

$x = \pm\sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ ma 1<x<2, quindi $\qquad x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ equivale a $f(x) = 0.$

Posto $x_0 = 1.3$ *si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice,* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *ove è*

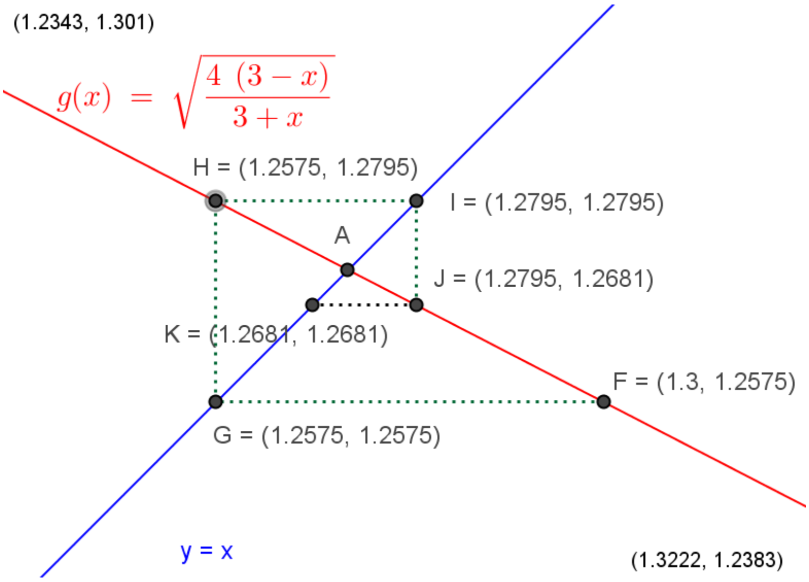
$x_{n+1} = \sqrt{\frac{4(3-x_n)}{3+x_n}}$ *. Cosa si può osservare? Si può congetturare che* x_n *, al crescere di n, approssimi sempre meglio il valore di* α*? In che modo? Con quali considerazioni?*

$x_0 = 1.3$ (ascissa di F)

$x_1 = \sqrt{\frac{4(3-x_0)}{3+x_0}} = \sqrt{\frac{4(3-1.3)}{3+1.3}} \cong 1.2575$ (ordinata di F, ascissa di H)

$x_2 = \sqrt{\frac{4(3-x_1)}{3+x_1}} \cong 1.2795$ (ordinata di H, ascissa di I)

$x_3 = \sqrt{\frac{4(3-x_2)}{3+x_2}} \cong 1.2681$ (ordinata di I, ascissa di K)



La formula $x_{n+1} = \sqrt{\frac{4(3-x_n)}{3+x_n}}$ è quella relativa al **metodo cosiddetto delle approssimazioni successive o del punto fisso**.

Tale metodo consiste in questo:

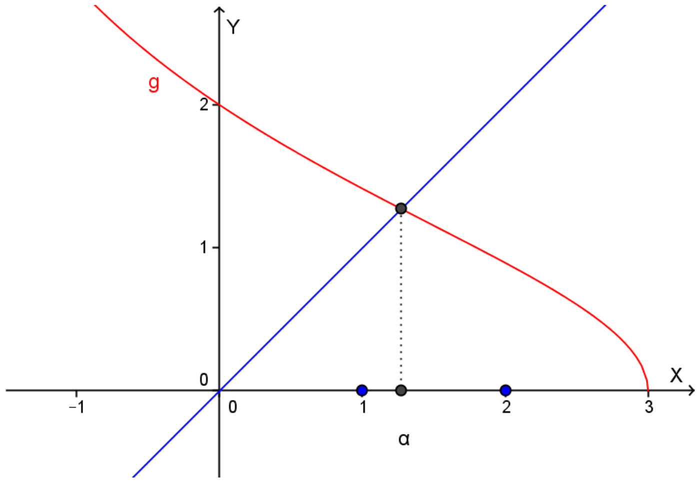
Sia da risolvere l'equazione $f(x) = 0$. Consideriamo l'equazione:

$\boldsymbol{g(x) = x - f(x)}$

La soluzione α dell'equazione $f(x) = 0$ (che supponiamo sia unica in un dato intervallo) è tale che $f(\alpha) = 0$, ma allora $\boldsymbol{g}(\alpha) = \alpha - \boldsymbol{f}(\alpha) = \alpha - 0 = \alpha$**.** Cioè:

se α è soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ lo è anche dell'equazione $\boldsymbol{g(x) = x}$ **(**da questa espressione deriva il termine **punto unito,** nel senso che y=x).

Nel nostro caso si ha la seguente situazione grafica (cui si perviene dopo uno studio sommario di $g(x) = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$.



Quindi α è l'ascissa del punto A di intersezione tra le curve $y = g(x)$ *e* $y = x$.

Quindi, trasformando l'equazione $f(x) = 0$ nella forma $x = g(x)$, partendo da un punto iniziale x_0 , utilizzando la formula $x_{n+1} = g(x_n)$ si ottengono delle approssimazioni successive della radice dell'equazione $f(x) = 0$.

Nel nostro caso, $x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$, quindi $g(x) = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$, da cui $x_{n+1} = \sqrt{\frac{4(3-x_n)}{3+x_n}}$.

Quindi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sono delle approssimazioni successive della soluzione α dell'equazione $f(x) = 0$ con α tale che $1 < \alpha < 2$ ed inoltre, al crescere di n, $x_{n+1} = g(x_n)$ tende alla radice α dell'equazione $f(x) = 0$.

Condizione sufficiente per la convergenza:

*Se g(x) è derivabile in nell'intervallo [a; b] ed in tale intervallo risulta |g'(x)|<1, allora esiste un unico punto unito α nell'intervallo e la successione $g(x_n)$ converge ad α per ogni approssimazione iniziale $x_0 \in [a; b]$; il punto $(\alpha; \alpha)$ è detto **attrattore**.*

Nel nostro caso $g(x) = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$, $x_0 = 1.3$, $[a; b] = [1; 2]$

Risulta: $g'(x) < 1$ quando

$$-\frac{6}{\sqrt{\frac{3-x}{x+3}}\,(x+3)^2} < 1$$

Che è verificata per -3<x<3, quindi sempre nell'intervallo $[1; 2]$: quindi esiste un solo punto unito A (attrattore) e $g(x_n)$ *converge ad* α *per n che tende all'infinito.*

3)

Sia R la regione del quarto quadrante compresa fra il grafico K di $f(x)$ e gli assi del sistema di coordinate Oxy. Si calcoli l'area di R.

$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 12}$

Studiamo sommariamente la funzione f(x).

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: né pari né dispari

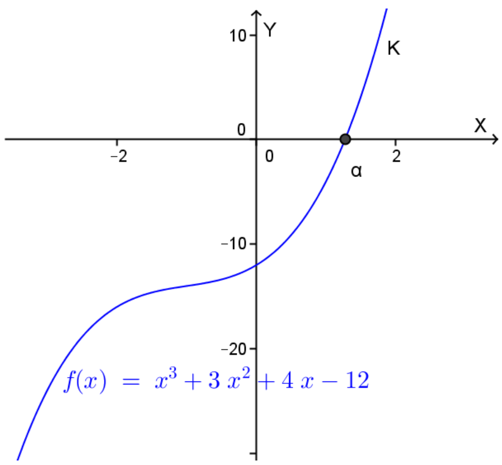
Intersezioni con gli assi cartesiani:
$x = 0, \;\; y = -12$
$y = 0, \;\; x^3 + 3x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \alpha \cong 1.27$ (come visto nel punto precedente)

Limiti:
$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 + 3x^2 + 4x - 12) = \pm\infty$

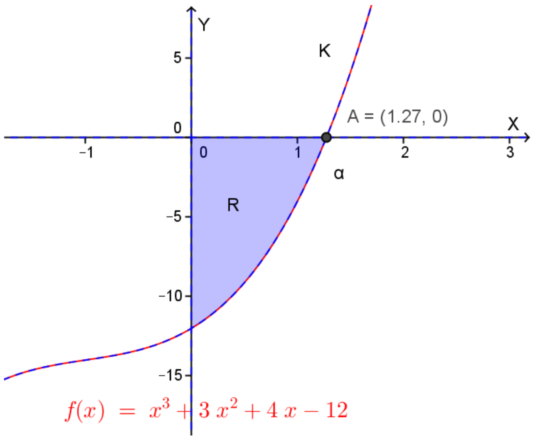
Derivata prima:
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 > 0, \;\; \Delta < 0$ quindi $f'(x) > 0 \quad \forall x$, pertanto la funzione è sempre crescente

Derivata seconda:
$f''(x) = 6x + 6 > 0 \; per \; x > -1$: flesso per x= - 1, di ordinata y = -14
$f''(x) > 0 \quad se \quad x > -1 \;\; (concavità \; verso \; l'alto)$.

Il grafico della funzione è il seguente:



La regione R è quella indicata in figura.



L'area richiesta è data da:

$$Area(R) = -\int_0^{\alpha} f(x)dx = -\int_0^{\alpha}(x^3+3x^2+4x-12)dx = -\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+2x^2-12x\right]_0^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4}\alpha^4+\alpha^3+2\alpha^2-12\alpha \cong 9.32\ u^2$$

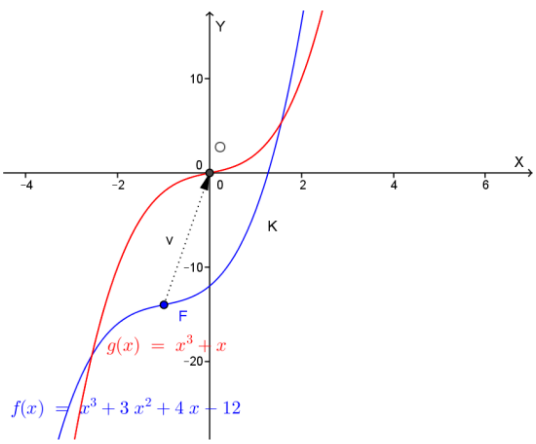
4)

Si introduca un nuovo sistema di riferimento ottenuto da Oxy traslando gli assi e portando O nel punto di flesso di K. Qual è l'equazione di K nel nuovo sistema di riferimento?

$f(x) = x^3+3x^2+4x-12$, flesso $F = (-1;-14)$

La traslazione di assi che porta O in F ha equazioni:

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y+14 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ y = Y-14 \end{cases} : \ y = x^3+3x^2+4x-12 \quad \text{si trasforma in } Y = X^3+X$$



Notiamo che traslare gli assi in modo che O vada in F equivale a traslare il grafico di f in modo che F vada in O:

$$f(x) = x^3+3x^2+4x-12$$

si trasforma in

$$g(x) = x^3+x$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri