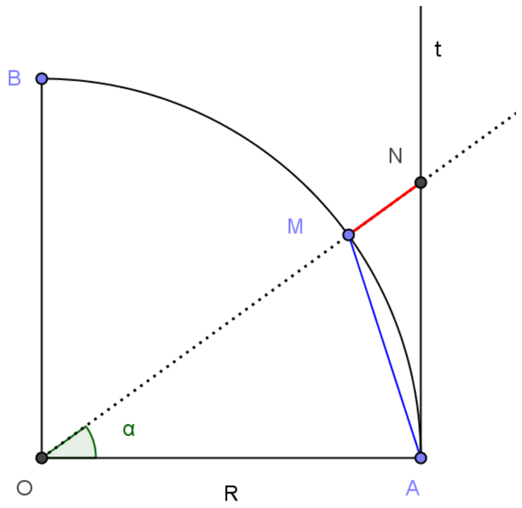
ORDINAMENTO 2014 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente t ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente t, rispettivamente, in M ed N.

1)

Posto $A\hat{O}M = \alpha$ *, si calcoli il rapporto* $\frac{MN}{MA}$ *e lo si esprima in funzione di* $x = sen\ \frac{\alpha}{2}$*, controllando che risulta:* $f(x) = \frac{x}{1-2x^2}$ *.*



$\boldsymbol{A\hat{O}M = \alpha}$ **,** **con** $\boldsymbol{0 < \alpha < \frac{\pi}{2}}$

Indicato con R il raggio della circonferenza, abbiamo:

$MA = 2R\ sen\ \frac{\alpha}{2} = 2Rx$ (per il teorema della corda)

$$MN = ON - OM = \frac{R}{\cos\alpha} - R = R\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = R\frac{2sen^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}} = R\frac{2sen^2\frac{\alpha}{2}}{1 - 2\ sen^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2Rx^2}{1-2x^2}$$

Quindi risulta:

$$\frac{MN}{MA} = \frac{\frac{2Rx^2}{1-2x^2}}{2Rx} = \frac{x}{1-2x^2} = f(x)$$

2)

Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione f(x) e se ne tracci il grafico γ .

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x^2}$$

Dominio: $1 - 2x^2 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$-\infty < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty$$

Simmetrie notevoli: f(-x) = - f(x), quindi la funzione è dispari (grafico simmetrico rispetto all'origine).

Intersezioni con gli assi cartesiani: il grafico interseca gli assi nell'origine.

Segno della funzione: $\frac{x}{1-2x^2} > 0$ **… ….** $-\infty < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-2x^2} = 0^{\mp}$ (y=0 asintoto orizzontale; non ci sono asintoti obliuqui)

$\lim_{x\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pm}} \frac{x}{1-2x^2} = \mp\infty$ $\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ asintoto verticale)

$\lim_{x\to\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\pm}} \frac{x}{1-2x^2} = \mp\infty$ $\left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ asintoto verticale)

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2\,x^2 + 1}{(2x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \ \ \forall x \ del \ dominio$: la funzione è sempre crescente.

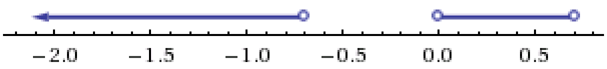
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4x(3+2x^2)}{(2x^2-1)^3}$$

$f''(x) > 0 \quad se$

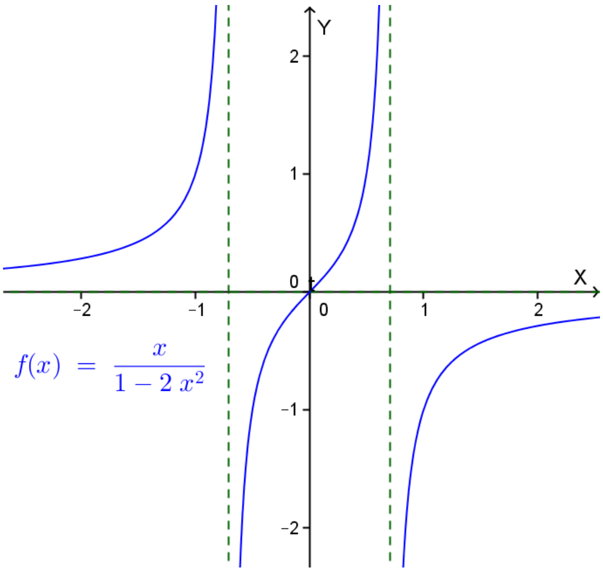
$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$



Abbiamo un flesso nell'origine.

Il grafico della funzione è il seguente:



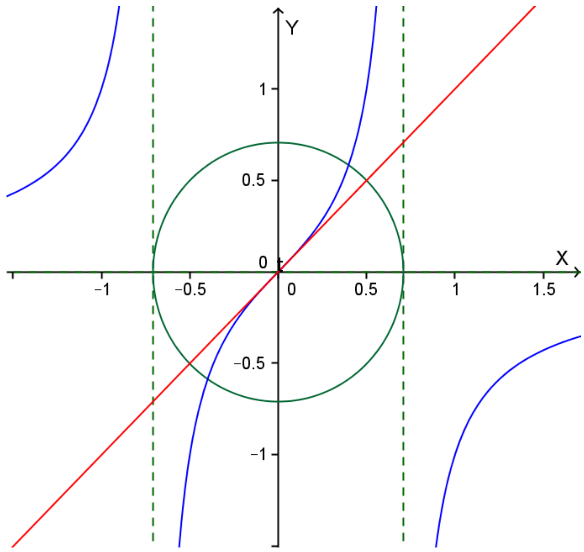
3)

Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso; si scriva poi l'equazione della circonferenza con il centro nel suddetto punto di flesso e tangente agli asintoti verticali di γ.

La tangente a γ nel punto di flesso O=(0;0) ha equazione $y - 0 = f'(0)(x - 0)$; essendo $f'(0) = 1$, la tangente ha equazione: $\boldsymbol{y = x}$.

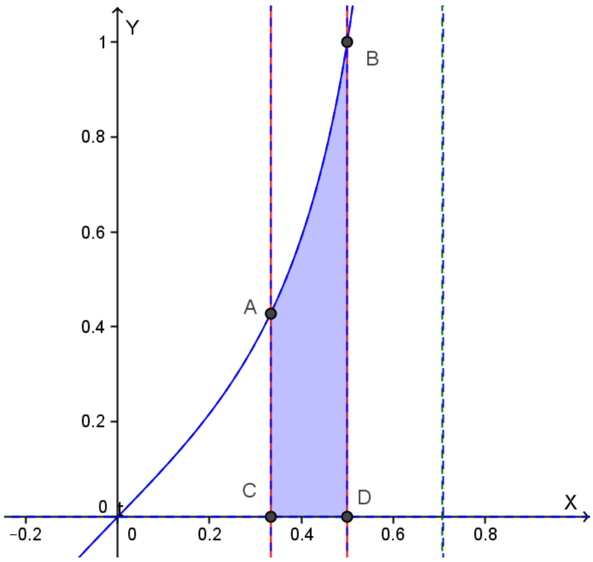
La circonferenza richiesta ha centro in O e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Equazione circonferenza: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = \frac{1}{2}}$



4)

Si determini l'area della regione di piano limitata dalla curva γ *dall'asse x e dalle rette di equazioni* $x = \frac{1}{3}$ *e* $x = \frac{1}{2}$.



$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-2x^2}dx = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{-4x}{1-2x^2}dx = -\frac{1}{4}\left[ln\left|1-2x^2\right|\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}ln\left(\frac{14}{9}\right) \cong 0.11$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri