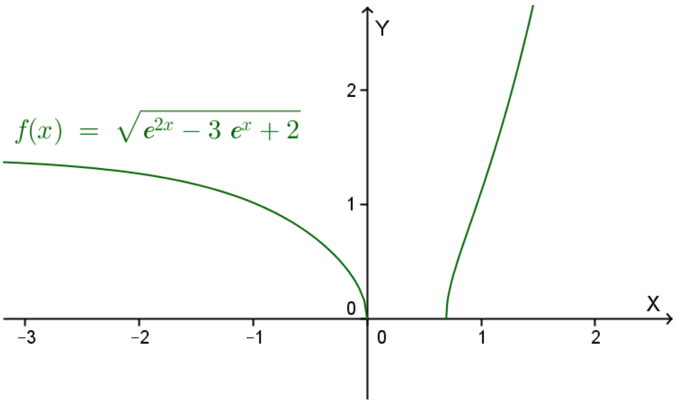
ORDINAMENTO 2014 SESSIONE SUPPLETIVA QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$

$e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x \leq 1, \quad e^x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0, \quad x \geq ln2$

DOMINIO: $-\infty < x \leq 0, \quad ln2 \leq x < +\infty$



QUESITO 2

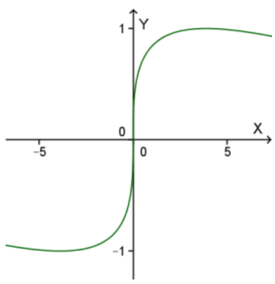
La funzione: $\boldsymbol{f(x) = sen\sqrt[3]{x}}$ *è evidentemente continua nel punto x=0. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.*

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\,x^{2/3}}$$

La derivata non esiste in x=0 ed è in particolare:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$$

Quindi in x=0 abbiamo un flesso a tangente verticale.



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + sen^2\frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{1}{\pi}$.

Risulta: $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{3\pi^2}$

La derivata $f'(x)$ della funzione è:

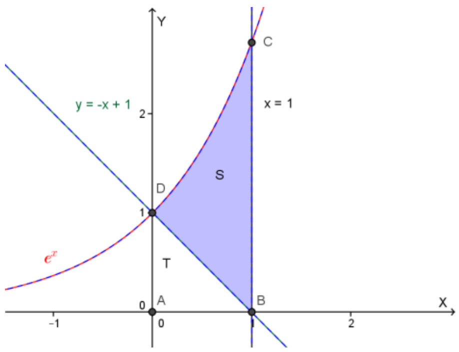
$$\frac{2}{3}\,x\left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-\frac{1}{3}\,\sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{4}{3\pi}$$

La tangente in P ha quindi equazione: $y - \frac{2}{3\pi^2} = \frac{4}{3\pi}\left(x - \frac{1}{\pi}\right) \implies y = \frac{4}{3\pi}x - \frac{2}{3\pi^2}$

QUESITO 4

Data la parte finita di piano compresa tra le rette x+y-1=0 e x-1=0 ed il grafico della funzione $y = e^x$ *, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.*



L'area della parte di piano richiesta è data da:

$$A(S) = \int_0^1 (e^x - (-x+1))dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(e - \frac{3}{2}\right)u^2 \cong 1.22\,u^2$$

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume V_1 ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide ABCD il volume V_2 del cono ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del triangolo T (che ha raggio AD=1 e altezza AB=1).

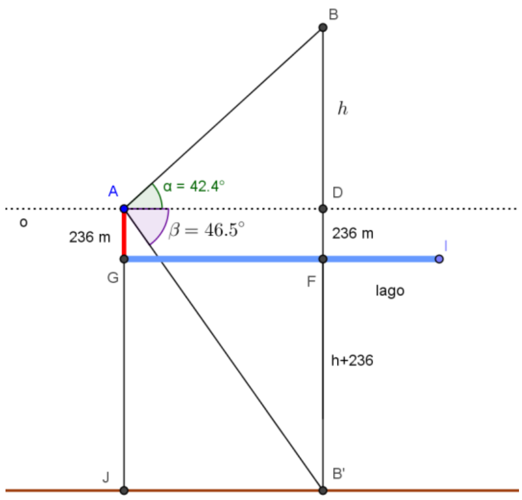
$$V_1 = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}\pi$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) - \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{6}(3e^2 - 5) \cong 8.989\ u^3$$

QUESITO 5

Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.



BB' è perpendicolare alla linea dell'orizzonte o e risulta BF=B'F (B' è il simmetrico di B rispetto alla superficie del lago. L'altezza richiesta è h=BD.

$AD = h \cdot cotg\ \alpha = h \cdot cotg\ 42.4°$
$AD = B'D \cdot cotg\ \beta \cong\ \ (h + 472) \cdot cotg\ 46.5°$

Quindi: $h \cdot cotg\ 42.4° = (h + 472) \cdot cotg\ 46.5°$, da cui :

$$h = \frac{472 \cdot cotg\ 46.5°}{cotg\ 42.4° - cotg\ 46.5°} \cong 3064\ m$$

L'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore è di circa 3064 metri.

N.B.

Non abbiamo tenuto conto della rifrazione del raggio B'A nel passaggio acqua-aria.

QUESITO 6

Si trovino gli eventuali flessi della curva:

$$f(x) = x[(\log 3x)^2 - 2\log 3x + 2]$$

La funzione è definita per ogni x>0.
Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(x\left(\log^2(3\,x) - 2\log(3\,x) + 2\right)\right) = \log^2(3\,x)$$

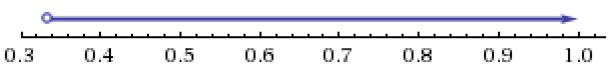
La funzione è derivabile in tutto il suo dominio (per x che tende a 0+ la derivata prima tende a + infinito: il grafico si avvicina ad O con tangente verticale).

Calcoliamo la derivata seconda:

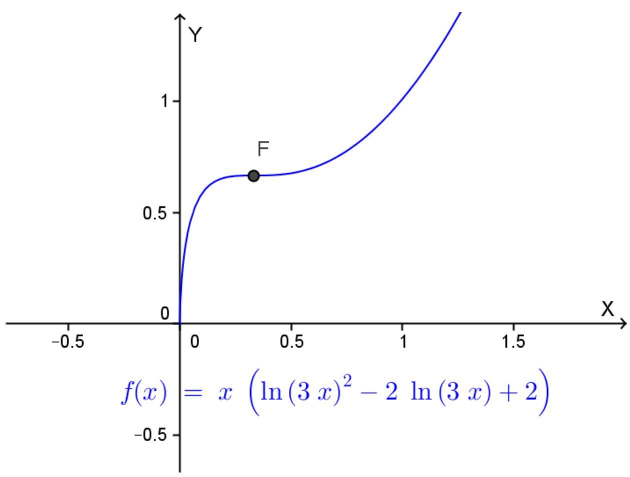
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\left(\log^2(3\,x) - 2\log(3\,x) + 2\right)\right) = \frac{2\log(3\,x)}{x}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\frac{2\log(3x)}{x} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \log(3x) > 0 \quad \Longrightarrow 3x > 1 \quad \Longrightarrow x > \frac{1}{3}$$



Abbiamo quindi concavità verso l'alto per $x > \frac{1}{3}$ e verso il basso per $0 < x < \frac{1}{3}$: si ha quindi un flesso per $x = \frac{1}{3}$, di ordinata $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$



QUESITO 7

Una scatola di forma cilindrica ha raggio R e altezza h. Se si aumenta del 5% ciascuna sua dimensione, di quanto aumenterà, in termini percentuali, il suo volume?

$V_1 = \pi R^2 h$

$V_2 = \pi\left(R + \frac{5}{100}R\right)^2\left(h + \frac{5}{100}h\right) = \pi(1.05\,R)^2(1.05\,h) = \pi R^2 h \cdot (1.05)^3 = V_1 \cdot (1.05)^3$

L'aumento percentuale del volume è dato da:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} \cdot 100 = \frac{V_1 \cdot (1.05)^3 - V_1}{V_1} \cdot 100 = \ ((1.05)^3 - 1) \cdot 100 = 15.7625\ \%$$

QUESITO 8

Si calcoli il limite della funzione $\frac{sen\ x + cos x - \sqrt{2}}{log\ sen 2x}$*, quando x tende a* $\frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) + \cos(x) - \sqrt{2}}{\log(\sin(2\,x))} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Infatti:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}(x) + \cos(x) - \sqrt{2}}{\log(sen(2x))} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{\log(1 + (sen(2x) - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(1 - cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{sen(2x) - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(2\ sen^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 1} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2\right)}{-2\ sen^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\left(2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2\right)}{-2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2} = = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2}{4\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Allo stesso risultato si può giungere applicando la regola di de L'Hôpital (di cui sono verificate le condizioni):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)-\sqrt{2}}{\log(sen(2x))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-sen(x)}{\frac{2\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}} == \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos(x)-sen(x))sen(2x)}{2\cos(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos(x)-sen(x))sen(2x)}{2(\cos^2(x)-sen^2(x))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{(\cos(x)-sen(x))}sen(2x)}{2\cancel{(\cos(x)-\operatorname{sen}(x))}\cdot(\cos(x)+sen(x))} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione: $y=\cos^5 x$ *, nell'intervallo* $0\le x\le \frac{\pi}{2}$.

Troviamo una primitiva di $y=\cos^5 x$.

$$\int \cos^5 x\,dx = \int cosx\cdot\cos^4 x\,dx = \int cosx\cdot(1-sen^2x)^2dx =$$
$$= \int (cosx - 2cosx\,sen^2x + cosx\,sen^4x)dx = sen\,x - \frac{2}{3}sen^3x + \frac{1}{5}sen^5x + k$$

Valore medio:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_o^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\;dx = \frac{2}{\pi}\left[sen\,x-\frac{2}{3}sen^3x+\frac{1}{5}sen^5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right] = \frac{16}{15\pi}$$

QUESITO 10

Un certo numero formato da tre cifre è uguale a 56 volte la somma delle cifre che lo compongono. La cifra delle unità è uguale a quella delle decine aumentata di 4, mentre, scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia, si ottiene un valore che è uguale a quello originario diminuito di 99. Si determini il numero di partenza.

Un numero di 3 cifre ha la forma

$N = xyz = z + y\cdot 10 + x\cdot 10^2 = z + 10y + 100x \quad con\ x, y\ e\ z\ naturali\ da\ 0\ a\ 9$

1) $z+10y+100x = 56\cdot(x+y+z)$
2) $z = y+4$
3) $x+10y+100z = z+10y+100x-99$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 44x - 46y - 55z = 0 \\ z = y + 4 \\ 99x - 99z - 99 = 0 \implies x = z + 1 = y + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 44(y+5) - 46y - 55(y+4) = 0 \\ z = y + 4 \\ x = y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -57y = 0 \implies y = 0 \\ z = y + 4 \\ x = y + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \\ x = 5 \end{cases}$$

Il numero richiesto è quindi $\boldsymbol{N = 504}$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri