PNI 2014 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

La curva γ è rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$x = \frac{t+1}{t}\ , \quad y = \frac{t^2+1}{t}$$

1)

Se ne ricavi l'equazione cartesiana y= f(x) e se ne costruisca il grafico.

$$\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t^2+1}{t} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{x-1} \\ y = \frac{x^2-2x+2}{x-1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

$y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ rappresenta una conica, in particolare un'iperbole.

Dominio: $x \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad -\infty < x < 1,\ \ 1 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: né pari né dispari (il dominio non è simmetrico rispetto ad O).

Intersezioni con gli assi cartesiani:

$x = 0,\ \ y = -2$
$y = 0, \quad\ x^2 - 2x + 2 = 0 \quad mai$

Segno della funzione: $\frac{x^2-2x+2}{x-1} > 0$ se x>1 (il numeratore è sempre positivo)

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \pm\infty$ (c'è asintoto obliquo, perché si tratta di una funzione razionale fratta in cui il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore)

$\lim\limits_{x\to 1^\pm} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \pm\infty$ ($x = 1$ asintoto verticale)

Asintoto Obliquo:

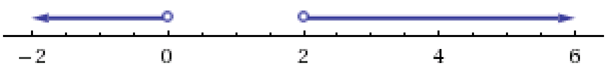
$$y = \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \frac{x^2-2x+1+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2+1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

Quindi l'asintoto obliquo (a $\pm\infty$) ha equazione: $y = x - 1$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$f'(x) > 0: \quad x < 0, \; x > 2$



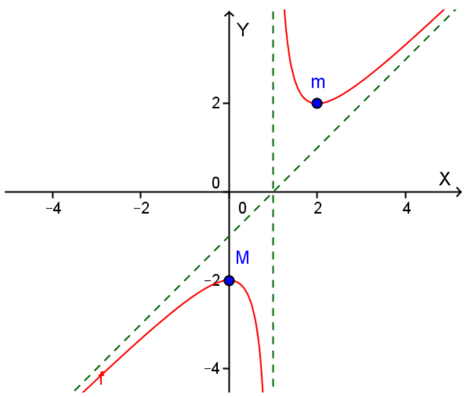
Quindi la funzione è crescente per $x < 0, \; x > 2$ e decrescente per $0 < x < 2 \; (con\ x \neq 1)$
Si ha quindi un massimo relativo per x=0 (ordinata -2) ed un minimo relativo per x=2 (ordinata 2).

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x) > 0 \quad se \quad x > 1 \; (concavità\ verso\ l'alto)$: non ci sono flessi

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

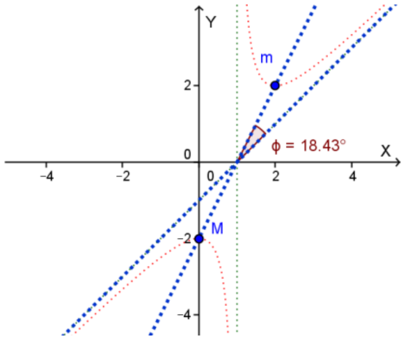
Si scriva l'equazione della retta s che congiunge i punti estremanti relativi di γ e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto Φ che tale retta forma con l'asintoto obliquo.

Gli estremanti relativi sono $m = (2; 2) \;\; ed \;\; M = (0; -2)$

La retta s ha equazione: $y = 2x - 2 \qquad (m_s = 2)$
L'asintoto obliquo ha equazione: $y = x - 1 \qquad (m = 1)$

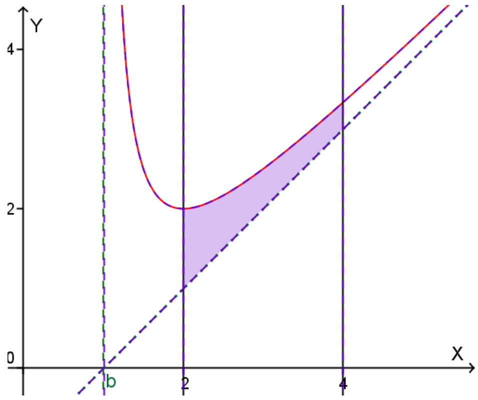
La tangente dell'angolo acuto Φ formato dalle due rette è:

$tg\Phi = \left|\frac{m_s - m}{1+m_s m}\right| = \left|\frac{2-1}{1+2\cdot 1}\right| = \frac{1}{3}$ da cui $\Phi = \text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 18.43° = 18°26'$



3)

Si calcoli l'area della regione di piano Σ, delimitata da γ, dal suo asintoto obliquo e dalle rette $x = 2$ e $x = 4$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

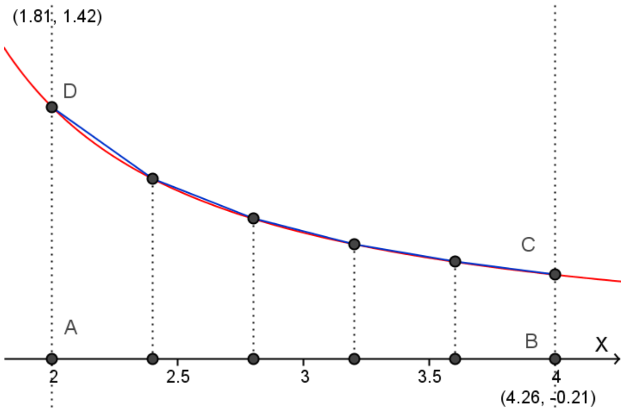
$$A(\Sigma) = \int_2^4 \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x-1)\right] dx = \int_2^4 \left[x - 1 + \frac{1}{x-1} - (x-1)\right] dx = \int_2^4 \left[\frac{1}{x-1}\right] dx =$$

$$= [ln|x-1|]_2^4 = log3$$

4)

Verificato che è $A(\Sigma) = \log 3$, si calcoli un'approssimazione di $\log 3$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1}{x-1}$ e l'intervallo [2;4]; calcoliamo $A(\Sigma) = \int_2^4 \left[\frac{1}{x-1}\right] dx$
Utilizzando il **metodo dei trapezi**. Dividiamo l'intervallo in n=5 parti.



$$\int_2^4 \left[\frac{1}{x-1}\right] dx \cong h\left[\frac{g(x_0)+g(x_5)}{2} + g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + g(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad x_0 = 2,\ x_1 = 2 + h = 2.4,\ x_2 = 2.8,\ x_3 = 3.2,\ x_4 = 3.6,\ x_5 = 4$

$$\int_2^4 \left[\frac{1}{x-1}\right] dx \cong 0.4 \cdot \left[\frac{g(2)+g(4)}{2} + g(2.4) + g(2.8) + g(3.2) + g(3.6)\right] =$$
$$= 0.4 \cdot \left[\frac{1+\frac{1}{3}}{2} + \frac{5}{7} + \frac{5}{9} + \frac{5}{11} + \frac{5}{13}\right] = 0.4 \cdot \left[\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{9} + \frac{5}{11} + \frac{5}{13}\right] =$$
$$= 0.4 \cdot \left[\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{9} + \frac{5}{11} + \frac{5}{13}\right] = \frac{10603}{9009} \cong 1.18$$

Quindi: $log3 \cong 1.18$ (N.B. Risulta $log3 \cong 1.0986$ ...)

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri