PNI 2014 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ , su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

Dominio: $x \neq 0 \implies \quad -\infty < x < 0, \;\; 0 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli: $f(-x) \neq f(x)$, non pari; $f(-x) \neq -f(x)$, non dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

$x = 0$: impossibile.

$y = 0, \qquad x = 1$

Segno della funzione: $\frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0$ se x>1

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x(x-1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0^-$ (asintoto y=0 per $x \to -\infty$)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x(x-1)}{x^2} = -\infty$ ($x = 0$ asintoto verticale)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (e^x$ è $infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ ad\ x)$

Asintoto Obliquo:

Potrebbe esserci asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

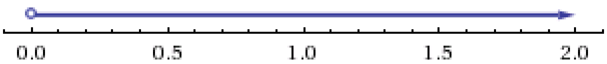
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$(e^x$ è $infinito\ di\ ordine\ superiore\ rispetto\ ad\ x^2)$: non c'è asintoto obliquo

Derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}$$

$f'(x)>0: \quad x>0$



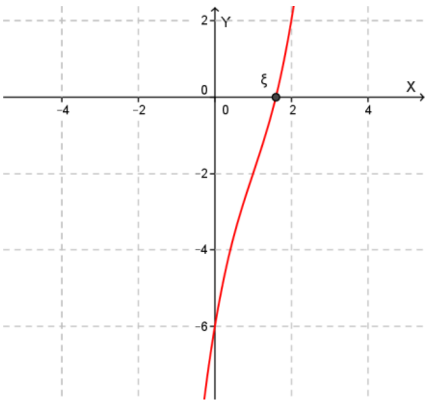
Quindi la funzione è crescente per $x>0$ e decrescente per $x<0$.

Derivata seconda:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)=\frac{e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)}{x^4}$$

$f''(x)>0 \quad se \quad x^3-3x^2+6x-6>0$

L'equazione $x^3-3x^2+6x-6=0$, essendo di grado dispari ha almeno una radice.
Studiamo sommariamente la funzione $y=x^3-3x^2+6x-6$.
E' definita su tutto R, tende a – infinito per x che tende a – infinito e tende a + infinito per x che tende a + infinito. Per x = 0, y = - 6.
$y'=3x^2-6x+6>0 \quad \forall x$ quindi la funzione è sempre crescente (avremo pertanto una sola radice).
Se x=1, y=-2; se x=2, y=2: quindi la radice ξ è compresa tra 1 e 2.
Grafico sommario di $y=x^3-3x^2+6x-6$

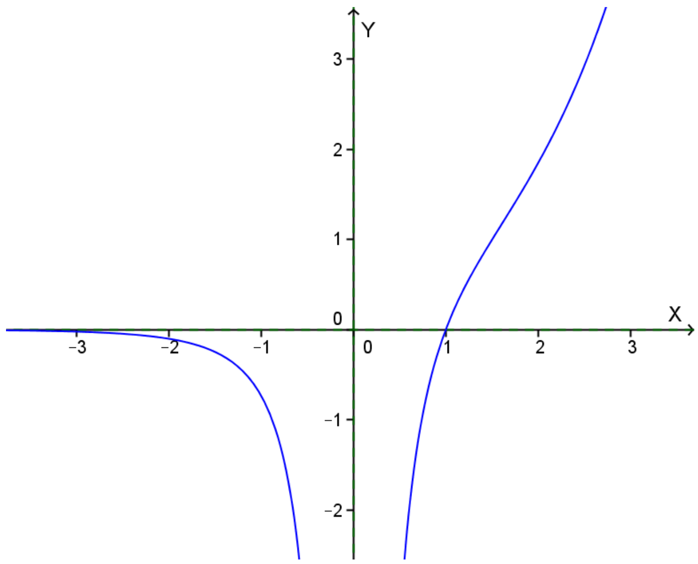


Quindi:

$f''(x)>0 \quad se \quad x^3-3x^2+6x-6>0 \implies x>\xi \quad con \quad 1<\xi<2$

Abbiamo quindi la concavità verso l'alto per $x > \xi$ e verso il basso se $x < \xi$ $(x \neq 0)$;
flesso per $x = \xi$.

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si dimostri che l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$$

ha, sull'intervallo $1 < x < 2$, un'unica radice reale ξ e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
Dopo aver constatato che ξ altro non è che l'ascissa del punto di flesso della curva γ, si calcoli il valore approssimato dell'ordinata.

Abbiamo già visto nel punto precedente che c'è una sola radice compresa tra 1 e 2; vediamo un metodo alternativo, più mirato alla richiesta.

La funzione $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$ è continua nell'intervallo [1;2];

$g(1) = -2 < 0 \quad e\ g(2) = 2 > 0$

Per il **teorema degli zeri** la funzione ammette almeno uno zero tra 1 e 2.

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 6 > 0 \quad \forall x$, quindi la funzione è sempre crescente: la soluzione è quindi unica e, come visto nel punto precedente, è proprio l'ascissa del punto di flesso della curva γ.

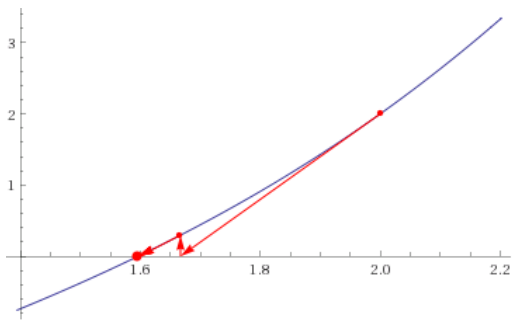
Dobbiamo ora calcolare *un valore approssimato di ξ con due cifre decimali esatte.*

Applichiamo il **metodo delle tangenti**.

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$ intervallo [1;2] $g(1) = -2 < 0$ $e\ g(2) = 2 > 0$

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 6 > 0 \quad \forall x$

$g''(x) = 6x - 6 > 0$ se x>1: quindi per 1<x<2 risulta $g''(x) \cdot g(1) < 0$, pertanto il punto iniziale dell'iterazione è $x_0 = b = 2$.



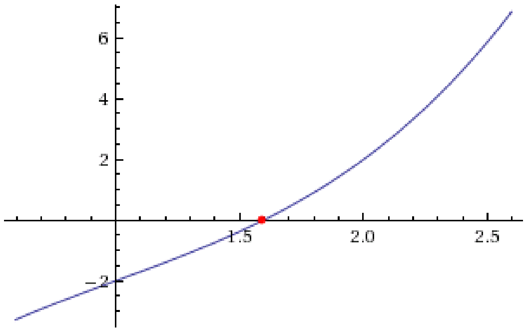
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2 - \frac{g(2)}{g'(2)} = 2 - \frac{2}{6} = \frac{5}{3} \cong 1.66667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{5}{3} - \frac{g\left(\frac{5}{3}\right)}{g'\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{187}{117} \cong 1.5983$$

$$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = \frac{187}{117} - \frac{g\left(\frac{187}{117}\right)}{g'\left(\frac{187}{117}\right)} \cong 1.5961$$

Quindi la radice approssimata con due cifre decimali è ***ξ=1.59***



Dobbiamo ora trovare un valore approssimato di $f(\xi)$, cioè un valore approssimato di

$f(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ *per* $x=\xi=1.59$.

$f(1.59)=\frac{e^{1.59}(1.59-1)}{1.59^2}\cong 1.14$

3)

Si scrivano le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse x e si calcoli l'area del triangolo che esse formano con l'asse y .

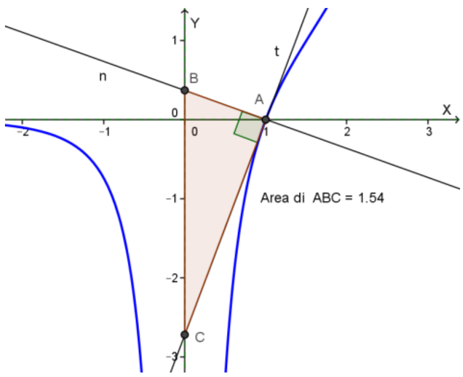
$f(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$*; il punto di intersezione con l'asse x è A=(1;0).*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x\,(x-1)}{x^2}\right)=\frac{e^x\left(x^2-2\,x+2\right)}{x^3}$$

Tangente in A: $m_t=f'(1)=e;\quad y-0=e(x-1),\quad y=ex-e$

Normale in A: $m_n=-\frac{1}{e}\,;\quad y-0=-\frac{1}{e}(x-1),\quad y=-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$

Rappresentiamo il triangolo che la tangente e la normale in A formano con l'asse y.



Intersecando la tangente t con l'asse y otteniamo le coordinate di C =(0;- e)

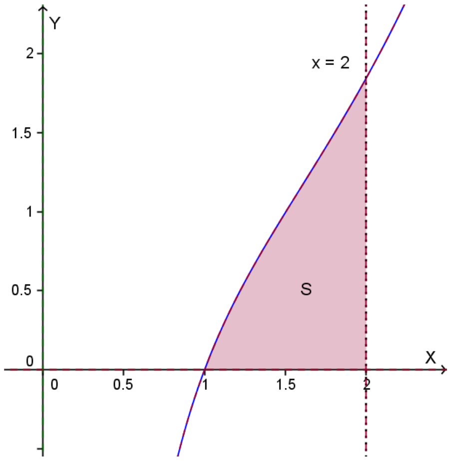
Intersecando la normale n con l'asse y otteniamo le coordinate di B =(0; 1/e).

L'area richiesta è data da:

$$A(ABC)=\frac{BC\cdot AO}{2}=\frac{\left(\frac{1}{e}+e\right)\cdot 1}{2}=\frac{1+e^2}{2e}\cong 1.54\,u^2$$

4)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione x = 2 .



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$A(S) = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx$, per parti, ponendo:

$$f = e^x(x-1) \quad \Longrightarrow \quad f' = xe^x$$
$$g' = \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad g = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx = fg - \int f'g = \frac{(1-x)e^x}{x} - \int xe^x\left(-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{(1-x)e^x}{x} + e^x = \frac{e^x}{x} + c$$

Quindi

$$A(S) = \int_1^2 \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx = \left[\frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e \cong 0.98\,u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri