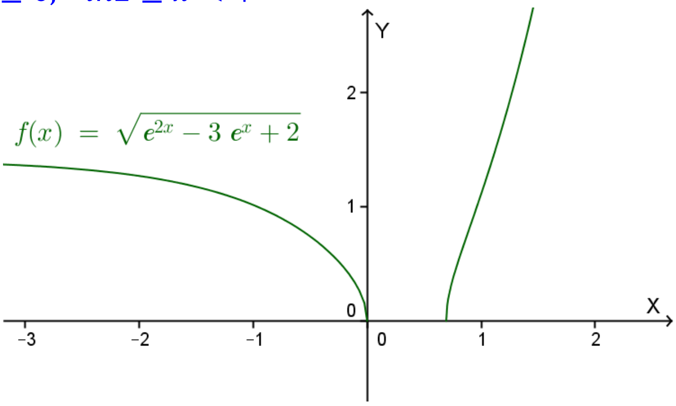
PNI 2014 SESSIONE SUPPLETIVA QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2}$

$e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x \leq 1, \quad e^x \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0, \quad x \geq ln2$

DOMINIO: $-\infty < x \leq 0, \quad ln2 \leq x < +\infty$



QUESITO 2

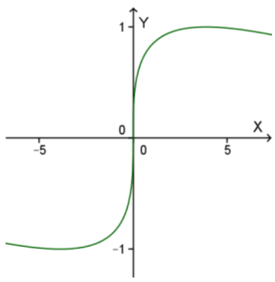
La funzione: $\boldsymbol{f(x) = sen\sqrt[3]{x}}$ *è evidentemente continua nel punto x=0. Si dimostri che nello stesso punto non è derivabile.*

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = \frac{\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3\,x^{2/3}}$$

La derivata non esiste in x=0 ed è in particolare:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$$

Quindi in x=0 abbiamo un flesso a tangente verticale.



QUESITO 3

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{3}\left(2 + sen^2\frac{1}{x}\right)$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{1}{\pi}$.

Risulta: $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{2}{3\pi^2}$

La derivata $f'(x)$ della funzione è:

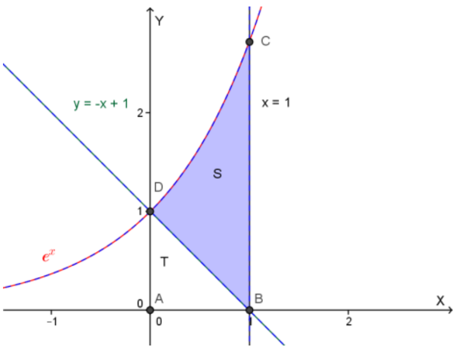
$\frac{2}{3}\,x\left(\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + 2\right) - \frac{1}{3}\,\sin\left(\frac{2}{x}\right)$

$f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{4}{3\pi}$

La tangente in P ha quindi equazione: $y - \frac{2}{3\pi^2} = \frac{4}{3\pi}\left(x - \frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow y = \frac{4}{3\pi}x - \frac{2}{3\pi^2}$

QUESITO 4

Data la parte finita di piano compresa tra le rette x+y-1=0 e x-1=0 ed il grafico della funzione $y = e^x$, si determini la sua area ed il volume del solido ottenuto facendola ruotare di un giro completo attorno all'asse x.



L'area della parte di piano richiesta è data da:

$$A(S) = \int_0^1 (e^x - (-x+1))dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(e - \frac{3}{2}\right)u^2 \cong 1.22\ u^2$$

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume V_1 ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del trapezoide ABCD il volume V_2 del cono ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del triangolo T (che ha raggio AD=1 e altezza AB=1).

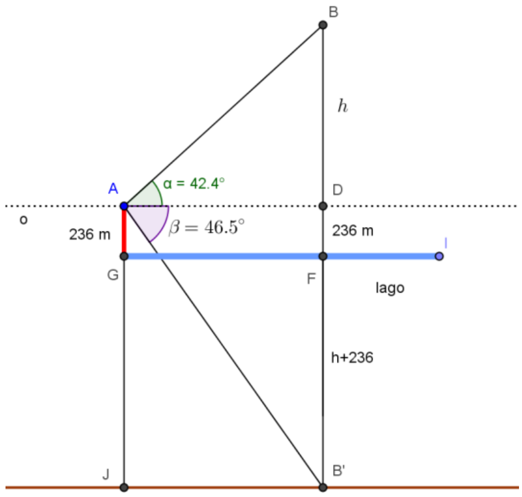
$$V_1 = \pi\int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi\int_0^1 e^{2x}dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{1}{3}\pi$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) - \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{6}(3e^2 - 5) \cong 8.989\ u^3$$

QUESITO 5

Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore.



BB' è perpendicolare alla linea dell'orizzonte o e risulta BF=B'F (B' è il simmetrico di B rispetto alla superficie del lago. L'altezza richiesta è h=BD.

$AD = h \cdot cotg\ \alpha = h \cdot cotg\ 42.4°$
$AD = B'D \cdot cotg\ \beta \cong \quad (h + 472) \cdot cotg\ 46.5°$

Quindi: $h \cdot cotg\ 42.4° = (h + 472) \cdot cotg\ 46.5°$, da cui :

$$h = \frac{472 \cdot cotg\ 46.5°}{cotg\ 42.4° - cotg\ 46.5°} \cong 3064\ m$$

L'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore è di circa 3064 metri.

N.B.

Non abbiamo tenuto conto della rifrazione del raggio B'A nel passaggio acqua-aria.

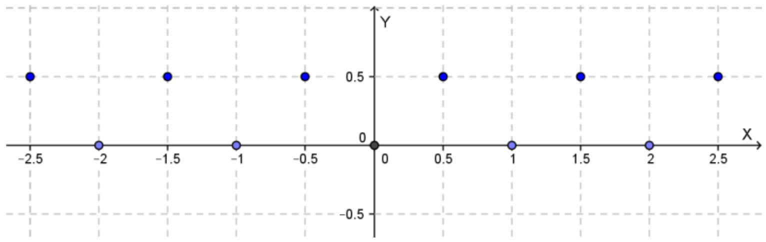
QUESITO 6

Si disegni il grafico γ della funzione:

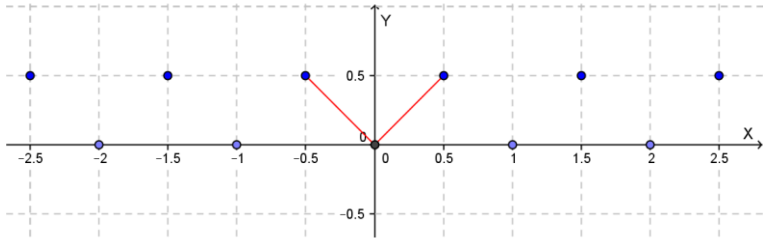
f (x) = distanza di x dal più prossimo intero.

Si dica se f (x) è una funzione periodica e si calcoli l'area della regione di piano delimitata da γ , dall'asse x e dalla retta $x = \frac{9}{10}$ *nell'intervallo* $\left[0, \frac{9}{10}\right]$.

Se x è $intero\ f(x) = 0$
Se $x = \frac{1}{2} + k, con\ k \in Z: f(x) = \frac{1}{2}$
Risulta chiaramente: $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$

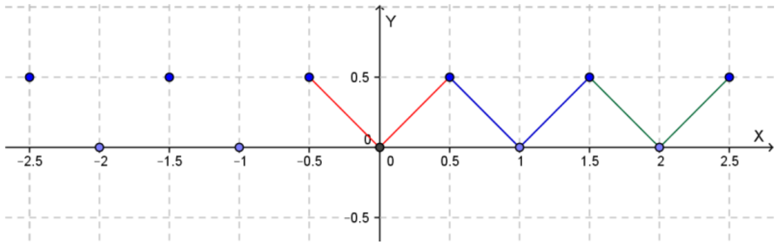


Se $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ l'intero più vicino ad x è 0, quindi $f(x) = |x|$



Analizziamo gli x positivi:

Se $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ l'intero più vicino ad x è 1, quindi $f(x) = |1 - x|$
Se $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$ l'intero più vicino ad x è 2, quindi $f(x) = |2 - x|$

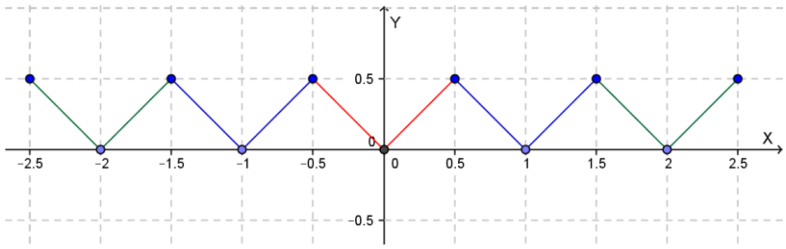


In generale, per ogni intero $n \ge 0$

Se $\frac{2n+1}{2} < x < \frac{2n+3}{2}$ l'intero più vicino ad x è $n+1$, quindi $f(x) = |n+1-x|$

Analizziamo gli x negativi:

Se $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ l'intero più vicino ad x è -1, quindi $f(x) = |1+x|$
Se $-\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$ l'intero più vicino ad x è -2, quindi $f(x) = |2+x|$

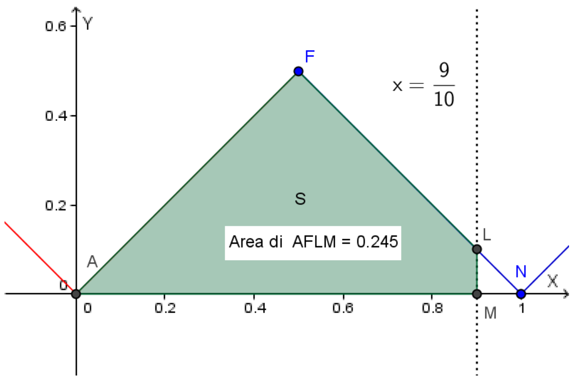


In generale, per ogni intero $n \geq 0$

Se $-\frac{2n+3}{2} < x < -\frac{2n+1}{2}$ l'intero più vicino ad x è $-n$, quindi $f(x) = |n+1+x|$

Notiamo che la funzione è simmetrica rispetto all'asse y e che è periodica di periodo 1.

Calcoliamo l'area della regione S di piano delimitata da γ *, dall'asse x e dalla retta* $x = \frac{9}{10}$ *nell'intervallo* $\left[0, \frac{9}{10}\right]$.



L'area della regione richiesta (AFLM) si può facilmente ottenere sottraendo all'area del triangolo AFN l'area del triangolo LMN.

$$A(AFN) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

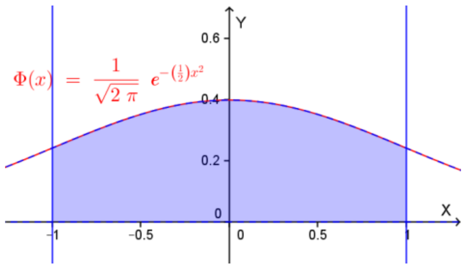
$$LM = MN = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad A(LMN) = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}}{2} = \frac{1}{200}$$

Pertanto:

$A(AFLM) = A(AFN) - A(LMN) = \frac{1}{4} - \frac{1}{200} = \frac{49}{200} = 0.245\ u^2$

QUESITO 7

Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana delimitata dalla curva γ di equazione $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ *e dall'asse x nell'intervallo* $-1 \leq x \leq 1$



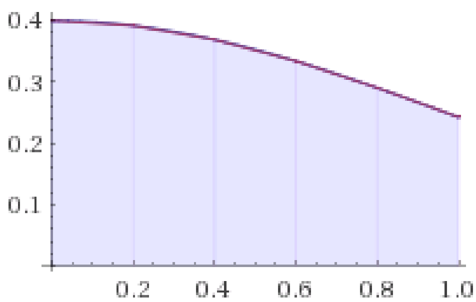
Trattandosi di una funzione pari, l'area richiesta è data da:

$$2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Consideriamo la funzione $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ e l'intervallo [0;1]; calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

utilizzando il **metodo dei trapezi**. Dividiamo l'intervallo in n=5 parti.



$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cong h\left[\frac{g(x_0) + g(x_5)}{2} + g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + g(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0 + h = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$

$$\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cong 0.2\left[\frac{g(0) + g(1)}{2} + g(0.2) + g(0.4) + g(0.6) + g(0.8)\right] =$$

$$= 0.2\left[\frac{1+e^{-\frac{1}{2}}}{2} + e^{-\frac{1}{50}} + e^{-\frac{4}{50}} + e^{-\frac{9}{50}} + e^{-\frac{16}{50}}\right] = 0.2 \cdot 4.268 \cong 0.85$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cong 0.80 \cdot 0.85 \cong 0.68$$

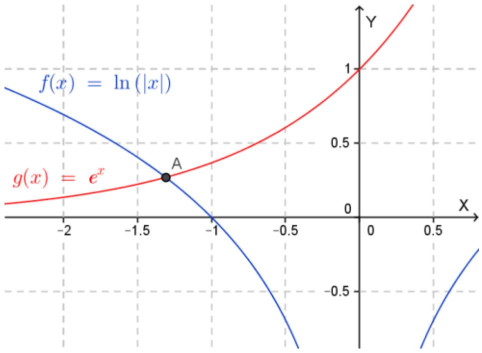
N.B.

La funzione $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ è la distribuzione normale standard ($\sigma = 1,\ \mu = 0$).
L'area richiesta rappresenta la probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori tra -1 e 1 ($tra\ -\sigma\quad e\quad +\sigma$) e tale probabilità, come è noto, è del 68%.

QUESITO 8

Si consideri l'equazione $log|x| - e^x = 0$.
Si dimostri che essa ammette una soluzione reale appartenente all'intervallo $-2 \le x \le 1$ *e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.*

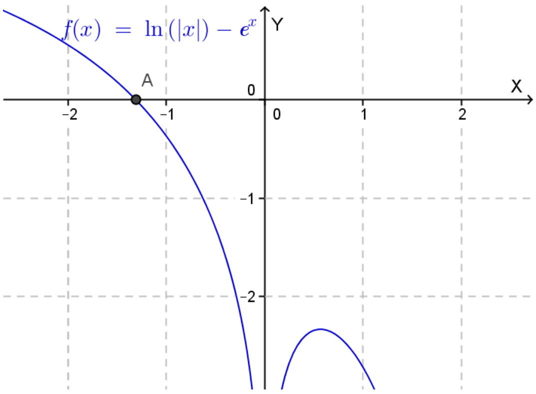
L'equazione può essere vista nella forma: $log|x| = e^x$.
Confrontiamo graficamente le due funzioni $y = log|x| \quad e \quad y = e^x$.



Dal confronto grafico segue chiaramente che l'equazione ammette una ed una sola soluzione tra -2 e -1. Cerchiamo una valore approssimato con due cifre decimali esatte della soluzione.

Utilizziamo il **metodo di bisezione** nell'intervallo $[a, b] = [-2, -1]$.

$$f(x) = ln|x| - e^x.$$

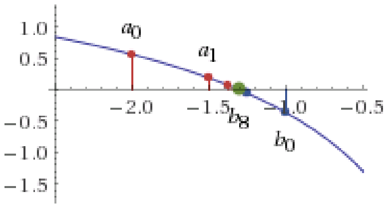


$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, b_n] & \text{sgn}(f(c_n)) = \text{sgn}(f(a_n)) \\ [a_n, c_n] & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

where $f(x) = \log(|x|) - e^x$

Servono 8 iterazioni per arrivare all'approssimazione richiesta: $\boldsymbol{x = -1.31}$



$\longleftarrow$ *diagramma di convergenza*

steps	a	function value	b	function value
0	$-2.$	$0.\times 10^{-1}$	$-1.$	$-0.\times 10^{-1}$
1	-1.5	0.2	$-1.$	$-0.\times 10^{-1}$
2	-1.5	0.2	-1.25	-0.06
3	-1.37	0.06	-1.25	-0.06
4	-1.31	$0.\times 10^{-3}$	-1.25	-0.06
5	-1.31	$0.\times 10^{-3}$	-1.28	-0.03
6	-1.31	$0.\times 10^{-3}$	-1.29	-0.02
7	-1.31	$0.\times 10^{-3}$	-1.30	-0.01
8	-1.30	-0.01	-1.30	-0.01

Usando il **metodo delle tangenti**, sono sufficienti 2 iterazioni per arrivare alla precisione richiesta (1.31).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\log(-x_n) - e^{x_n}}{\frac{1}{x_n} - e^{x_n}}$$

$$f(a) = f(-2) = \ln(2) - e^{-2} > 0 \qquad f(b) = f(-1) = -e^{-1} < 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e^x \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x < 0 \;\; in\; [a,b] = [-2,-1]$$

Essendo $f(a) \cdot f''(x) < 0 \; in \;\; [a,b] = [-2,-1]$ dobbiamo assumere come punto iniziale di iterazione $x_0 = b = -1$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

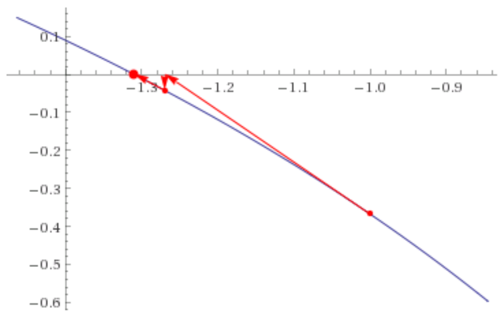
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{-e^{-1}}{-1 - e^{-1}} = \cong -1.269$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1.269 - \frac{\ln(1.269) - e^{-1.269}}{-\frac{1}{1.269} - e^{-1.269}} \cong -1.3091$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1.309 - \frac{\ln(1.309) - e^{-1.309}}{-\frac{1}{1.309} - e^{-1.309}} \cong -1.3098$$

Quindi la radice approssimata con due cifre decimali è x=*–1.31*

Diagramma di iterazione:



QUESITO 9

Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estraendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?

Determiniamo la probabilità q che nessuna sia un "Arcano maggiore":

$$q = \left(\frac{56}{78}\right)^4$$

La probabilità p che almeno una carta sia un "Arcano maggiore" è:

$$p = 1 - q = 1 - \left(\frac{56}{78}\right)^4 \cong 0.734 \cong 73\%$$

QUESITO 10

Nel poscritto al suo racconto "Il Mistero di Marie Rogêt", Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione?
Si motivi esaurientemente la risposta.

No, Edgar Allan Poe NON ha ragione.
La probabilità che esca un doppio 6 al terzo tentativo $\left(\frac{1}{36} \cong 2.8\%\right)$ è indipendente dal fatto che sia già uscito un doppio 6 le due volte precedenti; tale probabilità è comunque bassa, quindi scommettendo si ha un'alta probabilità di vincere (circa 97.2%), ma non perché il doppio 6 è già uscito le due volte precedenti!

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri