



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È data una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$. Siano C e D i punti d'intersezione delle tangenti in B e in A , rispettivamente, con una terza tangente alla semicirconferenza.

1. Si dimostri che l'angolo $\hat{C}OD$ è retto e che $AD \cdot BC = r^2$.
2. Posto $r = 1$ e $BC = x$, si calcoli il volume del solido generato dal trapezio $ABCD$, ruotando attorno ad AB , controllando che risulta:

$$V(x) = \frac{2}{3} \pi \cdot \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}.$$

Per quali valori di x , $V(x)$ ammette un massimo o un minimo?

3. Prescindendo dalla questione geometrica si studi la funzione $f(x) = 3V(x)/2\pi$ e se ne tracci il grafico γ .
4. Si calcoli l'area della superficie piana Σ , delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 3$.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
2. Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si verifichi che sono parallele.
3. Si calcoli l'area del triangolo che la prima di tali tangenti forma con l'asse x e con la retta $x = \frac{\pi}{2}$, e il volume del cono generato da una rotazione completa attorno all'asse x del suddetto triangolo.
4. Si calcoli l'area, nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, della regione di piano σ limitata dalla curva γ , dall'asse delle x e dalla retta $x = \frac{\pi}{4}$.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2° ; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5° . Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto.

2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{(e^x - 1)^2}{3x^2 + 4x^3}$, quando x tende a 0.

3. Data una statua AB di altezza $h = 2,5$ m, posta su di un piedistallo BP di altezza $a = 2$ m, si determini sul piano orizzontale passante per il punto P d'appoggio del piedistallo un punto O tale che da esso la statua sia vista sotto angolo massimo.

4. Si scrivano le equazioni della tangente e della normale al diagramma della funzione:

$$f(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4} \right) \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$

nel punto P di ascissa $x = 0$.

5. La regione del I quadrante delimitata dall'iperbole di equazione $9x^2 - 4y^2 = 36$ e dall'asse x nell'intervallo $2 \leq x \leq 4$, è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x , sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

6. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

7. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y = \log_{\sin x}(x^2 - 5x + 6), \text{ con } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

8. Il kilogrammo campione è un cilindro di platino-iridio, che ha un diametro di 39 mm ed è alto 39 mm. Qual è la densità in $\frac{g}{cm^3}$ della lega che è stata usata per costruirlo?

9. Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = x^2 \sqrt{x^3 - 1}$$

nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

10. Un motociclista procede a velocità costante su di una strada statale. Poco dopo la partenza, incontra una pietra miliare con l'indicazione chilometrica scritta con due cifre. Un'ora più tardi, ne nota un'altra con le stesse cifre, ma invertite, e, dopo un'altra ora, ne individua una terza con le due cifre nell'ordine iniziale, ma separate da uno zero. Quale è stata la velocità della moto?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.