LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA
PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx$$

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.

N.B. la funzione ha periodo $T = \pi$, quindi **possiamo limitare lo studio all'intervallo $0 \le x \le \pi$.**

Dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \;\; \frac{\pi}{2} < x \le \pi$

Simmetrie notevoli: visto il dominio, la funzione non può essere né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

$se \;\; x = 0, \qquad y = 0$

$se \; y = 0, \; \frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx = 0 \;\; \Longrightarrow tgx\left(\frac{1}{3}tg^2x + tgx + 1\right) = 0$, da cui:

- $tgx = 0: \;\; x = 0, \;\; x = \pi$
- $\frac{1}{3}tg^2x + tgx + 1 = 0$: mai (il delta dell'equazione di secondo grado associata è negativo)

Segno della funzione: $\;\; tgx\left(\frac{1}{3}tg^2x + tgx + 1\right) > 0 \;\; se \; tgx > 0: \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Limiti:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} \left(\frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx\right) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}} \left(\frac{1}{3}tg^3x\right) = \mp\infty: \quad x = \frac{\pi}{2} \quad asintoto\ verticale$$

Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui poiché la funzione è definita in un intervallo limitato.

Derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan^3(x)}{3}+\tan^2(x)+\tan(x)\right)=(\tan(x)+1)^2\sec^2(x)$$

$f'(x)=(tgx+1)^2\cdot\cos^2 x$

Nel dominio della funzione risulta $f'(x)=0$ quando $tgx+1=0 \quad \Longrightarrow \quad tgx=-1$ quindi per $x=\frac{3}{4}\pi$ (punto di flesso a tangente orizzontale); $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{3}$.
Flesso $F=\left(\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{1}{3}\right)$.
$f'(x)=(tgx+1)^2\cdot\cos^2 x>0 \quad \forall x\neq\frac{3}{4}\pi$: la funzione è sempre crescente.

Derivata seconda:

$f''(x)=2(tgx+1)(tg^2x+1)(2tg^2x+tgx+1)$

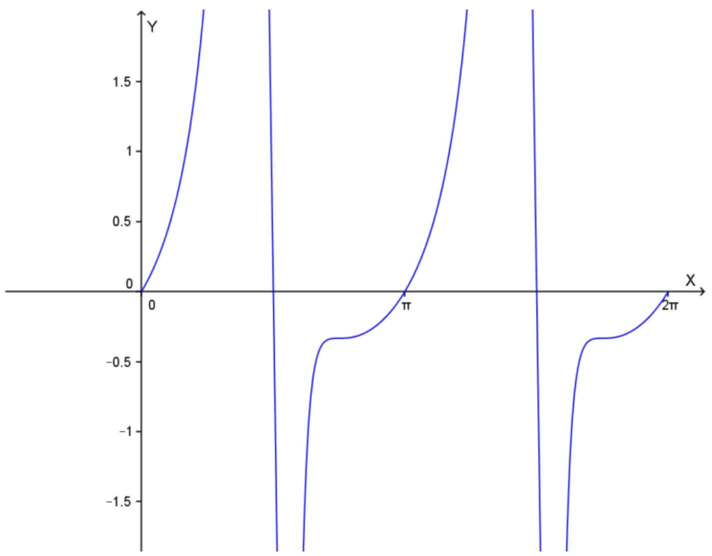
$f''(x)=0\ per\ x=\frac{3}{4}\pi$ (in cui c'è il flesso a tangente orizzontale già trovato).

$f''(x)>0$ quando $tgx+1>0$ quindi per $0\leq x<\frac{\pi}{2} \quad e \quad \frac{3}{4}\pi<x\leq\pi$: in tali intervalli il grafico volge la concavità verso l'alto.

Il grafico γ della funzione

$$f(x)=\frac{1}{3}tg^3x+tg^2x+tgx$$

(nell'intervallo richiesto $0\leq x\leq 2\pi$) è il seguente:



2)

Si scrivano le equazioni delle tangenti a γ nei punti di intersezione con l'asse x e si verifichi che sono parallele.

Come già visto le intersezioni con l'asse x sono: $A = (0; 0)$, $B = (\pi; 0)$, $C = (2\pi; 0)$.
Cerchiamo i coefficienti angolari delle tangenti in tali punti.

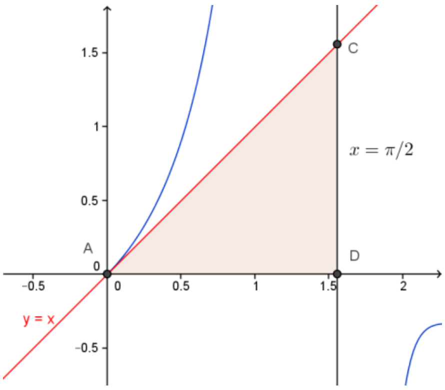
$$f'(x) = (tgx + 1)^2 \cdot \cos^2 x \Longrightarrow m_A = f'(0) = 1, \quad m_B = f'(\pi) = 1, \quad m_c = f'(2\pi) = 1$$

Quindi le tangenti in A, B e C sono parallele.

Tangente in A: $y = x$, tangente in B: $y = x - \pi$, tangente in C: $y = x - 2\pi$

3)

Si calcoli l'area del triangolo che la prima di tali tangenti forma con l'asse x e con la retta $x = \frac{\pi}{2}$, e il volume del cono generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo.



Il triangolo richiesto ACD ha area:

$$Area(ACD) = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{8}\pi^2$$

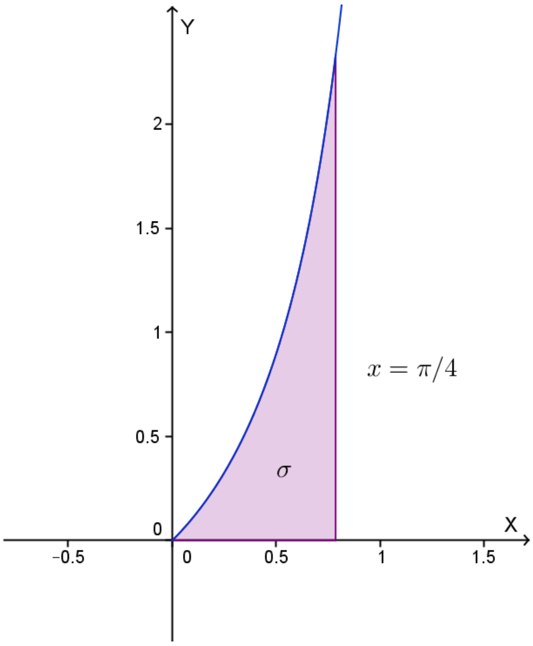
Il triangolo ACD, ruotando di un giro completo intorno all'asse x, genera un cono di altezza AD e raggio di base CD; il suo volume è quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\, CD^2 \cdot AD = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{24}\pi^4\right) \ u^3$$

4)

Si calcoli l'area, nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, della superficie piana σ, delimitata dalla curva γ , dall'asse x e dalla retta $x\ = \frac{\pi}{4}$.

La superficie σ è la seguente:



La sua area si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\boldsymbol{A(\sigma)} = \int_0^{\pi/4} f(x)dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx\right)dx$$

Poiché risulta:

$$\frac{1}{3}tg^3x + tg^2x + tgx = \frac{1}{3}tgx(tg^2x) + 1 + tg^2x - 1 + tgx =$$
$$= \frac{1}{3}tgx(1 + tg^2x - 1) + 1 + tg^2x - 1 + tgx = \frac{2}{3}tgx + \left(\frac{1}{3}tgx + 1\right)(1 + tg^2x) - 1$$

$$\int \left(\frac{2}{3}tgx + \left(\frac{1}{3}tgx + 1\right)(1 + tg^2x) - 1\right)dx = -\frac{2}{3}\ln|cosx| + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}tgx + 1\right)^2 - x + C$$

Si avrà:

$$\boldsymbol{A(\sigma)} = \left[-\frac{2}{3}\ln|cosx| + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}tgx + 1\right)^2 - x\right]_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{7}{6} - \frac{2}{3}ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong \boldsymbol{0.61\ u^2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri