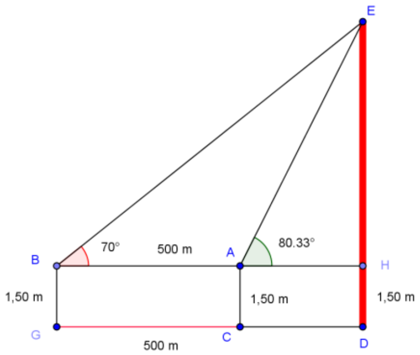
LICEO DELLA COMUNICAZIONE 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA
QUESITI

QUESITO 1

Due osservatori A e B, posti in un campo orizzontale, alla distanza di 500 m, seguono con il cannocchiale di un teodolite, alto 1,50 m, un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune di A e B, gli angoli di elevazione sono, rispettivamente, in A di 80,33° e in B di 70°. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano?



Risulta:

$EH = AH\ tg(80.33°) = BH\ tg(70°) = (AB + AH)tg(70°) = (500 + AH)tg(70°)$

Quindi:

$AH\ tg(80.33°) = (500 + AH)tg(70°) \quad \Longrightarrow \quad AH = \frac{500 \cdot tg(70°)}{tg(80.33°) - tg(70°)} \cong 440.12\ m$

$EH = AH\ tg(80.33°) = 440.12 \cdot tg(80.33°) \cong 2582.95\ m$

Pertanto **l'aereo vola ad un'altezza** dal suolo ED pari a:

$ED = EH + HD = 2582.95\ m + 1.50\ m = \mathbf{2584.45\ m}$

N.B.

Abbiamo ipotizzato che A e B fossero a sinistra di H; in realtà, come ci ha fatto notare la collega Lisa di Firenze, H potrebbe anche essere tra A e B, in tal caso sarebbe BH=AB-AH e l'altezza dal suolo dell'aereo sarebbe 937.2 m.

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ *, quando x tende a 0.*

Utilizzando gli **sviluppi di Taylor** risulta: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 0(x^2)$, quindi:

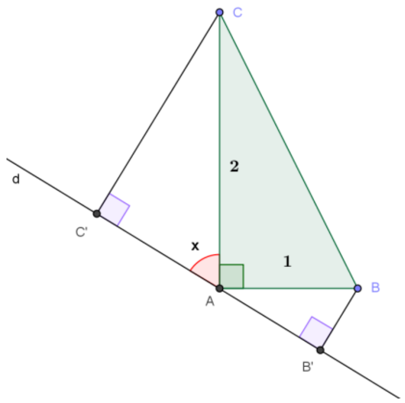
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+0(x^2)-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}}{x^2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Utilizzando la regola di **de L'Hôpital** (di cui sono soddisfatte le condizioni: le funzioni $f(x)=e^x-1-x$ e $g(x)=x^2$ sono continue e derivabili in un intorno di x=0, la derivata di $g(x), 2x$, non si annulla in un intorno di $x=0$ privato di 0, ed inoltre il limite si presenta nella forma $0/0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\mathbf{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

QUESITO 3

I cateti AB e AC del triangolo rettangolo BAC hanno per misura rispettivamente 1 e 2. Si conduca per il vertice A una retta r non secante il triangolo e sia B'C' il segmento che si ottiene proiettando ortogonalmente su di essa l'ipotenusa BC. Indicando con x la misura dell'angolo CAC ', si determini il valore di x che corrisponde al massimo dell'area del trapezio BCC'B'.



Notiamo che l'angolo x, affinché la retta r non tagli il triangolo, ha la seguente limitazione:

$$\mathbf{0<x<\frac{\pi}{2}}$$

Risulta:

$$AC'=2\cdot cosx,\quad CC'=2\cdot senx,\quad AB'=1\cdot\cos(B'AB)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=senx\,,\quad BB'=cosx$$

Quindi l'area S del trapezio *BCC'B' è:*

$$S=\frac{(BB'+CC')\cdot B'C'}{2}=\frac{(cosx+2senx)\cdot(2cosx+senx)}{2}=\frac{2\cos^2x+2sen^2x+5senxcosx}{2}$$
$$S=\frac{2+5senxcosx}{2}=1+\frac{5}{2}senx\,cosx=1+\frac{5}{4}sen2x$$

che è **massima** quando $sen2x=1\quad\Longrightarrow\quad 2x=\frac{\pi}{2}\qquad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}}$.

QUESITO 4

La somma dei quadrati delle due cifre che compongono un certo numero è 61. Il prodotto di questo numero per quello che si ottiene invertendo le cifre è 3640. Qual è il numero?

Detto N il numero di due cifre, possiamo indicarlo nella forma:

$N = ab = 10a + b, \quad con\ a\ e\ b\ naturali\ tali\ che\ 0 < a < 9 \quad e \quad 0 < b < 9$

Si ha:

$a^2 + b^2 = 61 \quad e \quad (ab) \cdot (ba) = (10a + b) \cdot (10b + a) = 10a^2 + 10b^2 + 101 \cdot a \cdot b = 3640$

Quindi:

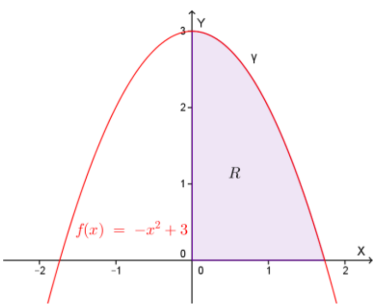
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 61 \\ 10a^2 + 10b^2 + 101 \cdot a \cdot b = 3640 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = 61 \\ 10(a^2 + b^2) + 101 \cdot a \cdot b = 3640 \end{cases}$$

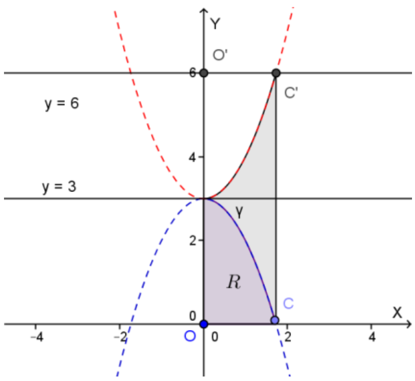
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 61 \\ 610 + 101 \cdot a \cdot b = 3640 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = 61 \\ a \cdot b = 30 \end{cases} \quad da \quad cui \ \ a = 5\ e\ b = 6 \ \ oppure \ \ a = 6\ e\ b = 5$$

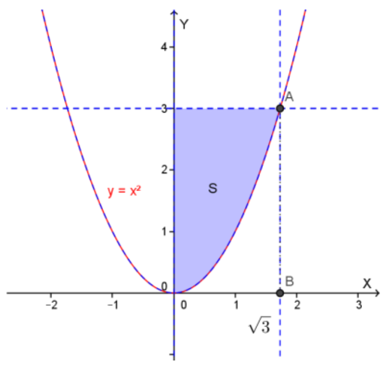
Il numero richiesto è quindi **56** oppure **65**.

QUESITO 5

Si consideri la regione R, finita, delimitata nel primo quadrante dagli assi coordinati e dalla parabola γ d'equazione $y = 3 - x^2$. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta y =3 .







Il volume richiesto equivale a quello del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione S delimitata dalla parabola d'equazione $y = x^2$, dall'asse y e dalla retta y=3. Tale volume V è dato da:

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (3^2 - x^4)dx = \pi \left[9x - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(9\sqrt{3} - \frac{9}{5}\sqrt{3}\right) = \left(\frac{36}{5}\sqrt{3}\,\pi\right)\, u^3$$

QUESITO 6

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

Poiché il delta dell'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$ è negativo risulta $x^2 - 2x + 5 > 0 \quad \forall x$, pertanto la funzione è definita su tutto l'asse reale. Non potranno esserci asintoti verticali ma solo orizzontali e/o obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) : F.I. [-\infty + \infty]$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)} \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2 - (x^2 - 2x + 5)\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 5}{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - 5}{\left(x - (-x)\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

Quindi per $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale di equazione $y = 1$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = +\infty$: quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx)] = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[-x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) \cdot \left(-x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)}{-x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 - (x^2 - 2x + 5)}{-x - x} =$$

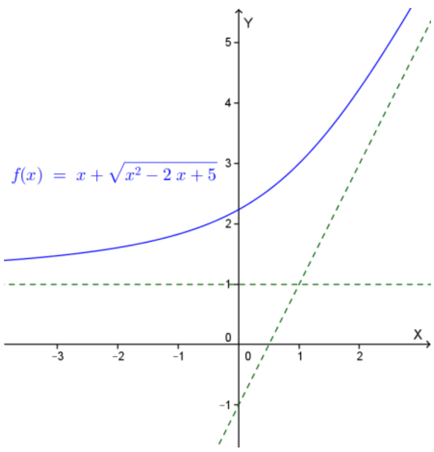
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 5}{-2x} = -1$$

Quindi per $x \to +\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2x - 1$.

Gli asintoti della curva hanno quindi equazioni:

$y = 1$ $(per\ x \to -\infty)$ e $\quad y = 2x - 1$ $(per\ x \to +\infty)$

Anche se non richiesto, indichiamo il grafico della funzione:



QUESITO 7

Si determini il campo di esistenza della funzione:

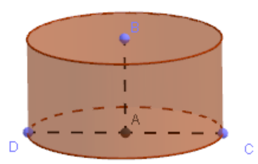
$$y = log_{senx}(x^2 - 5x + 6), \quad con \;\; 0 \le x \le 2\pi$$

Devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} senx \neq 1 \\ senx > 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0 < x < \pi \\ x < 2 \;\; \vee \;\; x > 3 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \;\; \frac{\pi}{2} < x < 2, \;\; 3 < x < \pi$$

QUESITO 8

Il kilogrammo campione è un cilindro di platino-iridio, che ha un diametro di 39 mm ed è alto 39 mm. Qual è la densità in $\frac{g}{cm^3}$ *della lega che è stata usata per costruirlo?*



La densità è data da: $d = \frac{m}{V}$. Cerchiamo il volume del cilindro (equilatero):

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot 19.5^2 \cdot 39 \; mm^3 \cong 46589.034 \; mm^3 = 46.589 \; cm^3$$

Quindi la densità della lega è data da:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{1000\ g}{46.589\ cm^3} \cong 21.464\ \frac{g}{cm^3}$$

Approfondimento

In realtà la lega ha il 90% di platino e il 10% di iridio.
Dato che la densità del platino è 21450 kg/m³ e quella dell'iridio 22650 kg/m³, la densità del campione è la media ponderata delle due densità:

$$d(lega\ campione) = (0{,}90 \cdot 21450\ +\ 0{,}10 \cdot 22650)\frac{kg}{m^3} =\ 21{,}650\frac{g}{cm^3} =$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = x^2\sqrt{x^3 - 1}$$

nell'intervallo $1 \le x \le 2$.

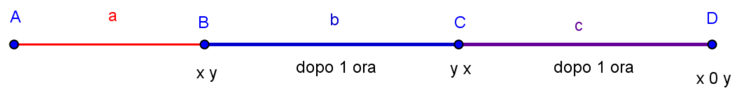
Il valor medio richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^2 x^2\sqrt{x^3-1}dx}{2-1} = \int_1^2 x^2\sqrt{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 3x^2(x^3-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{9}\left[(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{9}(7)^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{9}\sqrt{7} \cong 4.12$$

QUESITO 10

Un motociclista procede a velocità costante su di una strada statale. Poco dopo la partenza, incontra una pietra miliare con l'indicazione chilometrica scritta con due cifre. Un'ora più tardi, ne nota un'altra con le stesse cifre, ma invertite, e, dopo un'altra ora, ne individua una terza con le due cifre nell'ordine iniziale, ma separate da uno zero. Quale è stata la velocità della moto?



L'indicazione chilometrica xy indicata in B si può scrivere nella forma $10x + y$.
Dopo 1 ora il motociclista è in C, dove c'è l'indicazione chilometrica yx, che può essere scritta nella forma $10y + x$.

Dopo un'altra ora il motociclista è in D, dove c'è l'indicazione chilometrica $x0y$, che può essere scritta nella forma $100x + y$.
Poiché la velocità è costante, il motociclista percorre spazi uguali in tempi uguali, quindi lo spazio percorso da B a C è uguale a quello percorso da C a d; pertanto:

$(10y + x) - (10x + y) = (100x + y) - (10y + x)$ da cui:

$108x = 18y, \quad y = 6x$. Poiché x e y sono compresi tra 1 e 9 (inclusi), l'unica possibilità è:

$x = 1 \ e \ y = 6.$

Lo **spazio percorso in 1 ora** è $(10y + x) - (10x + y) = 9y - 9x = 54 - 9 = \mathbf{45\ km}$

La velocità del motociclista è quindi:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{45\ km}{1\ h} = 45\ km/h$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri