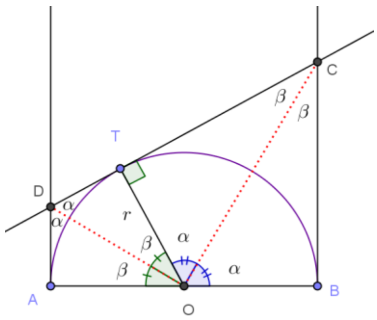
## ORDINAMENTO 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

*È data una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$. Siano C e D i punti d'intersezione delle tangenti in B e in A, rispettivamente, con una terza tangente alla semicirconferenza.*




### 1)

*Si dimostri che l'angolo è $C\hat{O}D$ è retto e che $AD \cdot BC = r^2$.*

In base ad una proprietà della circonferenza gli angoli OAD e ODT sono congruenti, come pure gli angoli OCT e OCB. Gli angoli $\alpha \;\; e \;\; \beta$ sono chiaramente complementari (risulta infatti $2\alpha + 2\beta = 180°$): Quindi l'angolo COD è retto.

Per il secondo teorema di Euclide OT è medio proporzionale tra DT (congruente ad AD) e CT (congruente a BC), pertanto: $DT \cdot CT = r^2 = AD \cdot BC$.

### 2)

*Posto $r = 1 \;\; e \;\; BC = x$, si calcoli il volume del solido generato dal trapezio ABCD, ruotando attorno ad AB, controllando che risulta:*

$$V(x) = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} \; .$$

*Per quali valori di $x$, $V(x)$ ammette un massimo o un minimo?*

Dalla relazione dimostrata nel punti 1), $AD \cdot BC = r^2$, risulta: $AD = \frac{r^2}{BC} = \frac{1}{x}$.
Il solido in oggetto è un tronco di cono con raggi di base AD e BC e altezza AB; il suo volume è pari a :

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(AD^2+BC^2+\sqrt{AD\cdot BC}\right)\cdot AB=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{x^2}+x^2+\sqrt{\frac{1}{x}\cdot x}\right)\cdot 2=$$

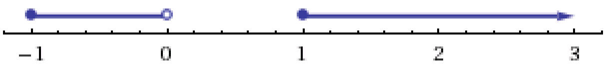
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{x^2}+x^2+1\right)\cdot 2=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$$

Abbiamo quindi verificato che $V(x)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$ $, con\ x>0$

V(x) è massimo o minimo quando lo è $y=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$ , sempre con x>0.
Calcoliamo la derivata di questa funzione:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4+x^2+1}{x^2}\right)=2x-\frac{2}{x^3}$$

$y'=\frac{2x^4-2}{x^3}\geq 0$ se $-1\leq x<0\,, x\geq 1$




Con la limitazione sulla x, x>0, possiamo quindi dire che y è crescente se $x\geq 1$ e decrescente per $0<x<1$: abbiamo quindi un minimo (relativo e assoluto) per x=1, mentre non abbiamo massimo (osserviamo che per x che tende a + infinito la funzione tende a + infinto).

*Il volume del solido quindi ammette minimo per x=1 (in tal caso è un cilindro di raggio 1 e altezza 2) mentre non ammette massimo.*

## 3)

*Prescindendo dalla questione geometrica si studi la funzione $f(x)=\frac{3V(x)}{2\pi}$ e se ne tracci il grafico $\gamma$.*

$$f(x)=\frac{3V(x)}{2\pi}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}+x^2+1$$

**Dominio**: x$\neq 0$ $\Longrightarrow$ $-\infty<x<0,\quad 0<x<+\infty$

**Simmetrie notevoli:** f(-x) = f(x), quindi la funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y).

**Intersezioni con gli assi cartesiani:** il grafico non interseca gli assi cartesiani.

**Segno della funzione:** $\frac{1}{x^2}+x^2+1>0$ in tutto il suo dominio.

**Limiti:**

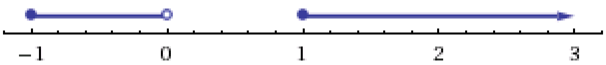
$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}+x^2+1\right)=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+x^2+1\right)=+\infty$ ($x=0$ asintoto verticale)

Non ci sono asintoti obliqui poiché la funzione è un infinito del secondo ordine per $x\to\pm\infty$ $(f(x)\sim x^2)$.

**Derivata prima:**

$f'(x)=\frac{2x^4-2}{x^3}\geq 0$ se $-1\leq x<0\,, x\geq 1$



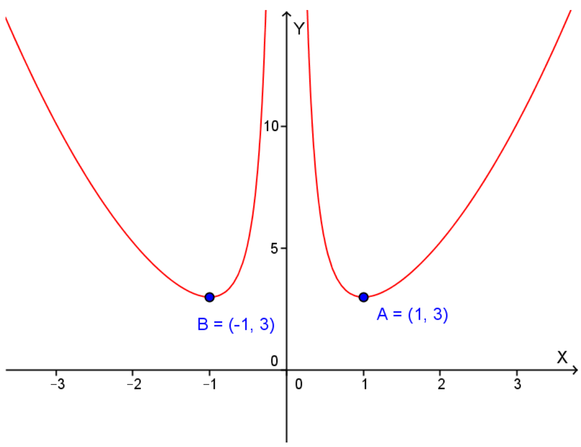

La funzione quindi cresce per $-1\leq x<0\,, x\geq 1$ e decresce per $-\infty<x<-1$ e per $0<x<1$ : minimo (relativo e assoluto) per $x=\pm 1$, che vale $f(\pm 1)=3$.

**Derivata seconda:**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^4-2}{x^3}\right)=\frac{6}{x^4}+2$$

$f''(x)>0$ in tutto il suo dominio; il suo grafico $\gamma$ ha quindi la concavità sempre rivolta verso l'alto e non ci sono flessi.

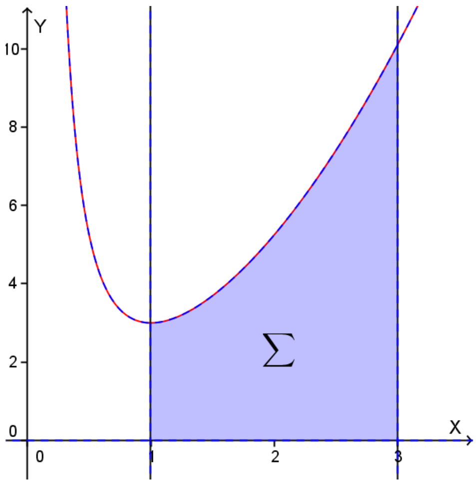
Il grafico $\gamma$ della funzione è il seguente:



## 4)

*Si calcoli l'area della superficie piana $\Sigma$ , delimitata dalla curva $\gamma$ , dall'asse $x$ e dalle rette $x = 1$ $e$ $x = 3$.*

La superficie $\Sigma$ è la seguente:




La sua area si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\boldsymbol{A(\Sigma)} = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + x^2 + 1\right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^3 = \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{u^2} \cong \mathbf{11.33}\ \boldsymbol{u^2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri