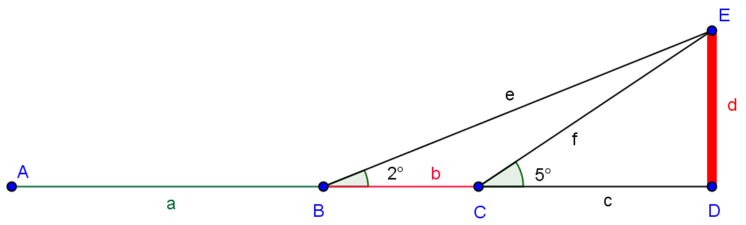
ORDINAMENTO 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2°; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5°. Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto.



Detta v la velocità di marcia, il tempo per percorrere il tratto $b = BC$ è $t_b = 30'$ e risulta:

$b = v \cdot t_b = 30v$

Detto t_c il tempo necessario per percorrere il tratto $CD = c$ risulta:

$c = v \cdot t_c$

Risulta inoltre: $d = c \cdot tg5° = (b + c) \cdot tg2°$, da cui: $c = \frac{b \cdot tg2°}{tg5° - tg2°} = \frac{30v \cdot tg2°}{tg5° - tg2°}$; quindi:

$c = v \cdot t_c \quad \Longrightarrow \quad v \cdot t_c = \frac{30v \cdot tg2°}{tg5° - tg2°} \quad \Longrightarrow \quad t_c = \frac{30 \cdot tg2°}{tg5° - tg2°} \cong 19.929' \cong 20'$

Il tratto BD è quindi percorso in circa 50' e pertanto **il gruppo raggiungerà il cantiere alle ore 7 e 50 minuti**

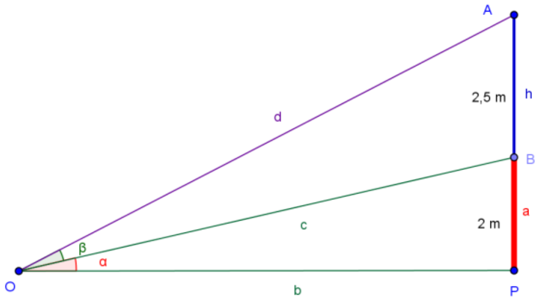
QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{(e^x - 1)^2}{3x^2 + 4x^3}$ *, quando x tende a 0.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x^2(3 + 4x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{3 + 4x} = 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

QUESITO 3

Data una statua AB di altezza $h = 2{,}5\ m$, posta su di un piedistallo BP di altezza $a = 2\ m$, si determini sul piano orizzontale passante per il punto P d'appoggio del piedistallo un punto O tale che da esso la statua sia vista sotto angolo massimo.



Dobbiamo determinare la distanza b in modo che l'angolo $AOB = \beta$ assuma il valore massimo.
L'angolo APO è retto.

$$\begin{cases} a+h = b \cdot tg(\alpha+\beta) = 4{,}5 \\ a = b \cdot tg\alpha = 2 \implies b = \frac{2}{tg\alpha} \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{4{,}5}{tg(\alpha+\beta)} \\ b = \frac{2}{tg\alpha} \end{cases} \implies \frac{4{,}5}{tg(\alpha+\beta)} = \frac{2}{tg\alpha}$$

$$4{,}5 \cdot tg\alpha = 2 \cdot tg(\alpha+\beta) = 2\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} \implies 4{,}5 \cdot tg\alpha(1 - tg\alpha\, tg\beta) = 2tg\alpha + 2tg\beta$$

$$4{,}5 \cdot tg\alpha - 4{,}5 \cdot tg^2\alpha\, tg\beta = 2tg\alpha + 2tg\beta \ ; \qquad tg\beta = \frac{2{,}5 \cdot tg\alpha}{2 + 4{,}5 \cdot tg^2\alpha}$$

Poniamo per comodità $y = tg\beta \quad e \quad x = tg\alpha \quad \left(con\ x > 0, essendo\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.
L'angolo β è massimo quando lo è $y = tg\beta$. Analizziamo quindi la funzione:

$$y = \frac{2{,}5x}{2 + 4{,}5x^2} = \frac{5x}{4 + 9x^2}$$

Risulta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{4+9x^2}\right) = -\frac{5(9x^2-4)}{(9x^2+4)^2}$$

Quindi $y' > 0 \ \ se \ \ 9x^2 - 4 < 0 \quad cioè$: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$
Quindi y è crescente per $0 < x < \frac{2}{3}$ e decrescente per $x > \frac{2}{3}$: ha quindi massimo assoluto per $x = \frac{2}{3}$, e tale massimo è $y_{max} = (tg\beta)_{max} = \frac{5}{12}$.
L'angolo massimo sotto cui è vista la statua è $\beta = arct\left(\frac{5}{12}\right)$ e la distanza di O da P è:

$$b = \frac{2}{tg\alpha} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3\ m$$

QUESITO 4

Si scrivano le equazioni della tangente e della normale al diagramma della funzione:

$$f(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}\right) ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$

nel punto P di ascissa x = 0.

Risulta $f(0) = 0$.
Calcoliamo la derivata della funzione:

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{1}{4}\right)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}\right) = \frac{-6x^2 + 3(x^2-1)\,x\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 4}{2(x^2-1)}$$

$f'(0) = -2$

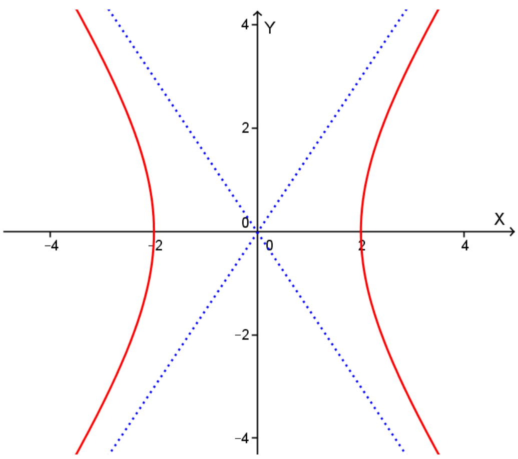
Equazione tangente in P: $y - 0 = -2(x-0) \quad\Longrightarrow\quad y = -2x$

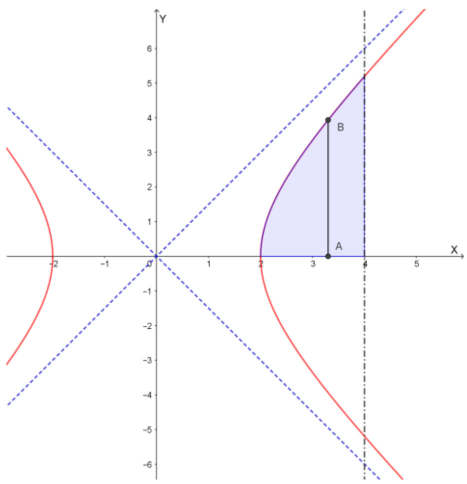
Equazione normale in P: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x-0) \quad\Longrightarrow\quad y = -\frac{1}{2}x$

QUESITO 5

La regione del I quadrante delimitata dall'iperbole di equazione $9x^2 - 4y^2 = 36$ *e dall'asse x nell'intervallo* $2 \leq x \leq 4$ *, è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.*

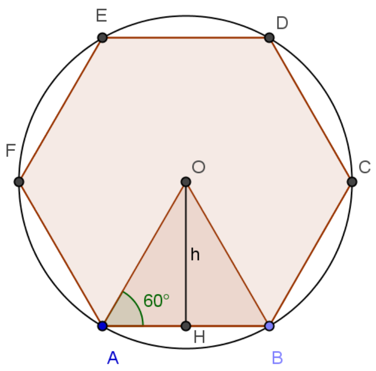
L'iperbole può essere scritta nella forma: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; si tratta quindi di un'iperbole riferita agli assi, con asse trasverso l'asse x e semiassi $a = 2\ e\ b = 3$. Il suo grafico è il seguente:





Il volume di S si ottiene calcolando il seguente integrale:

$\int_2^4 A(x)dx$, essendo $A(x)$ l'area dell'esagono regolare di lato $AB = y$, con y ordinata del punto B dell'iperbole e $2 < x < 4$.



$$A(x) = \frac{1}{2}(6 \cdot \overline{AB}) \cdot h = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AH} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \sqrt{3} =$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AB}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot y^2$$

Da $9x^2 - 4y^2 = 36$ ricaviamo $y^2 = \frac{9}{4}x^2 - 9$

Quindi: $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4}x^2 - 9\right) = \frac{27}{8}\sqrt{3}(x^2 - 4)$

Pertanto il volume del solido S è dato da:

$$V(S) = \int_2^4 A(x)dx = \int_2^4 \frac{27}{8}\sqrt{3}(x^2 - 4)dx = \frac{27}{8}\sqrt{3}\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^4 = \frac{27}{8}\sqrt{3} \cdot \frac{32}{3} =$$
$$= 36\sqrt{3}\, u^3 \cong 62.354\, u^3 = V(S)$$

QUESITO 6

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

Poiché il delta dell'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$ è negativo risulta $x^2 - 2x + 5 > 0 \quad \forall x$, pertanto la funzione è definita su tutto l'asse reale. Non potranno esserci asintoti verticali ma solo orizzontali e/o obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) : F.I. [-\infty + \infty]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)} \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2 - (x^2 - 2x + 5)\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x - 5}{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x - 5}{\left(x - (-x)\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x} = 1$$

Quindi per $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale di equazione $y = 1$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}\right) = +\infty$: quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-2x+5}\right)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\sqrt{x^2-2x+5}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-x+\sqrt{x^2-2x+5}\right)\cdot\left(-x-\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{-x-\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-(x^2-2x+5)}{-x-x}=$$

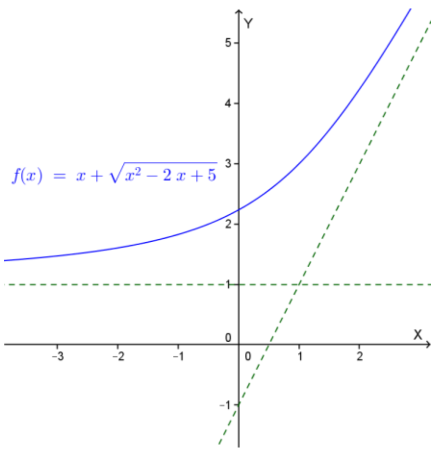
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{-2x}=-1$$

Quindi per $x\to+\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale di equazione $y=2x-1.$

Gli asintoti della curva hanno quindi equazioni:

$y=1\ (per\ x\to-\infty)\ \ e\ \ \ y=2x-1\ \ (per\ x\to+\infty)$

Anche se non richiesto, indichiamo il grafico della funzione:



QUESITO 7

Si determini il campo di esistenza della funzione:

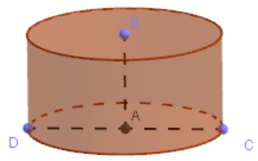
$$y=log_{senx}(x^2-5x+6),\quad con\ \ 0\le x\le 2\pi$$

Devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} senx\neq 1\\ senx>0\\ x^2-5x+6>0\\ 0\le x\le 2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}\\ 0<x<\pi\\ x<2\ \vee\ x>3\\ 0\le x\le 2\pi\end{cases}\Rightarrow\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x<2,\ 3<x<\pi$$

QUESITO 8

Il kilogrammo campione è un cilindro di platino-iridio, che ha un diametro di 39 mm ed è alto 39 mm. Qual è la densità in $\frac{g}{cm^3}$ *della lega che è stata usata per costruirlo?*



La densità è data da: $d = \frac{m}{V}$. Cerchiamo il volume del cilindro (equilatero):

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot 19.5^2 \cdot 39\ mm^3 \cong 46589.034\ mm^3 = 46.589\ cm^3$$

Quindi la densità della lega è data da:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{1000\ g}{46.589\ cm^3} \cong 21.464\ \frac{g}{cm^3}$$

Approfondimento

In realtà la lega ha il 90% di platino e il 10% di iridio.
Dato che la densità del platino è 21450 kg/m³ e quella dell'iridio 22650 kg/m³, la densità del campione è la media ponderata delle due densità:

$$d(lega\ campione) = (0{,}90 \cdot 21450\ +\ 0{,}10 \cdot 22650)\frac{kg}{m^3} = \ 21{,}650\frac{g}{cm^3} =$$

QUESITO 9

Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = x^2\sqrt{x^3 - 1}$$

nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$.

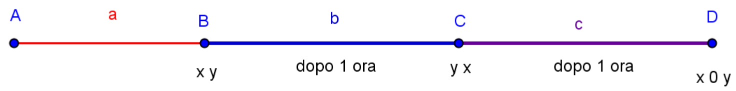
Il valor medio richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^2 x^2\sqrt{x^3-1}dx}{2-1} = \int_1^2 x^2\sqrt{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 3x^2(x^3-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{9}\left[(x^3-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{9}(7)^{\frac{3}{2}} = \frac{14}{9}\sqrt{7} \cong 4.12$$

QUESITO 10

Un motociclista procede a velocità costante su di una strada statale. Poco dopo la partenza, incontra una pietra miliare con l'indicazione chilometrica scritta con due cifre. Un'ora più tardi, ne nota un'altra con le stesse cifre, ma invertite, e, dopo un'altra ora, ne individua una terza con le due cifre nell'ordine iniziale, ma separate da uno zero. Quale è stata la velocità della moto?



L'indicazione chilometrica xy indicata in B si può scrivere nella forma $10x + y$.
Dopo 1 ora il motociclista è in C, dove c'è l'indicazione chilometrica yx, che può essere scritta nella forma $10y + x$.
Dopo un'altra ora il motociclista è in D, dove c'è l'indicazione chilometrica $x0y$, che può essere scritta nella forma $100x + y$.
Poiché la velocità è costante, il motociclista percorre spazi uguali in tempi uguali, quindi lo spazio percorso da B a C è uguale a quello percorso da C a d; pertanto:

$(10y + x) - (10x + y) = (100x + y) - (10y + x)$ da cui:

$108x = 18y, \quad y = 6x$. Poiché x e y sono compresi tra 1 e 9 (inclusi), l'unica possibilità è:

$x = 1\ e\ y = 6.$

Lo **spazio percorso in 1 ora** è $(10y + x) - (10x + y) = 9y - 9x = 54 - 9 = \mathbf{45\ km}$

La velocità del motociclista è quindi:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{45\ km}{1\ h} = 45\ km/h$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri