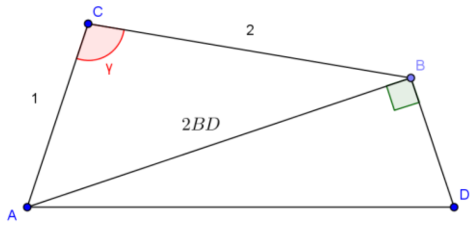
PNI 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Siano ABC e ABD due triangoli, il secondo rettangolo. Nel triangolo ABC il lato BC è il doppio di CA = 1 mentre nel triangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, il cateto AB è il doppio di BD.



1)

Si mostri che l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo $ACB = \gamma$ è espressa da:

$$f(\gamma) = sen\gamma - cos\gamma + \frac{5}{4}$$

Per il teorema del coseno applicato al triangolo ABC risulta:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot cos\gamma} = \sqrt{1 + 4 - 4cos\gamma} = \sqrt{5 - 4cos\gamma}$$

Quindi:

$$BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4cos\gamma}$$

Risulta:

$$Area(ABD) = \frac{AB \cdot BD}{2} = \frac{1}{4}(5 - 4cos\gamma)$$

$$Area(ABC) = \frac{AC \cdot BC \cdot sen\gamma}{2} = sen\gamma$$

Quindi:

$$Area(ADBC) = Area(ABD) + Area(ABC) = \frac{1}{4}(5 - 4cos\gamma) + sen\gamma = sen\gamma - cos\gamma + \frac{5}{4}$$

con $0 \leq \gamma \leq \pi$

2)

Si studi $f(\gamma)$ e se ne tracci il grafico anche prescindendo dai limiti geometrici del problema.

$$\mathbf{f(\gamma) = sen\gamma - cos\gamma + \frac{5}{4}}$$

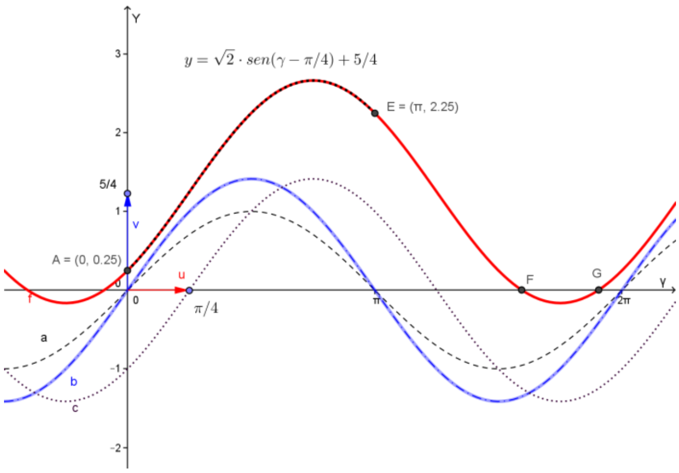
La funzione può essere scritta nella forma:

$$f(\gamma) = \text{sen}\gamma - \cos\gamma + \frac{5}{4} = \sqrt{2} \cdot sen\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

il cui grafico si ottiene mediante i seguenti passi:

1) $y = sen\gamma$ (grafico a)
2) $y = \sqrt{2} \cdot sen\gamma$ (grafico b) (dilatazione verticale di fattore $\sqrt{2}$)
3) $y = \sqrt{2} \cdot sen\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right)$ (grafico c) (traslazione verso destra di $\frac{\pi}{4}$)
4) $y = \sqrt{2} \cdot sen\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4}$ (grafico finale) (traslazione verso l'alto di $\frac{5}{4}$)

Indichiamo i grafici intermedi ed il grafico finale:



Il massimo (assoluto della funzione) è $\sqrt{2} + \frac{5}{4}$, e si ottiene per $\gamma - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \implies \gamma = \frac{3}{4}\pi$

La funzione

$$f(\gamma) = \text{sen}\gamma - \cos\gamma + \frac{5}{4} = \sqrt{2} \cdot sen\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

ha periodo 2π e, considerata nell'intervallo $[0; 2\pi]$, per $\gamma = 0$ vale $\frac{1}{4}$, incontra l'asse delle ascisse in F e G, le cui ascisse (approssimate) si ottengono risolvendo l'equazione: $\sqrt{2} \cdot sen\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4} = 0$. Il minimo della funzione si ottiene per $\gamma - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ e vale $\frac{5}{4} - \sqrt{2}$.

3)

Si determini, in gradi e primi sessagesimali, il valore di γ cui corrisponde il quadrilatero di area massima e si determinino area e perimetro di tale quadrilatero R .

L'area del quadrilatero è

$Area(ADBC) = sen\gamma - cos\gamma + \frac{5}{4} = \sqrt{2} \cdot sen\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4}$ con $0 \leq \gamma \leq \pi$

ed è massima, come trovato nel punto precedente, per $\gamma = \frac{3}{4}\pi$ radianti, che corrisponde a 135°00'.

Per tale valore di γ **l'area** del quadrilatero vale

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \boldsymbol{\sqrt{2} + \frac{5}{4}}$.

Il perimetro, in questo caso, vale: $AD + DB + BC + CA$.

Risulta:

$$BD = \frac{1}{2}\sqrt{5-4cos\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{5-4cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{5-4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$$

$$AB = 2BD = \sqrt{5+2\sqrt{2}}$$

quindi:

$$AD = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{5+2\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}\left(5+2\sqrt{2}\right)} = \sqrt{\tfrac{5}{4}\left(5+2\sqrt{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5\left(5+2\sqrt{2}\right)}$$

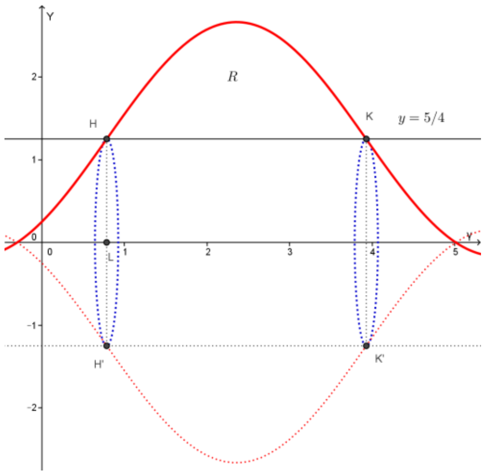
Quindi:

$$\boldsymbol{2p(R)} = AD+DB+BC+CA = \frac{1}{2}\sqrt{5\left(5+2\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}+2+1$$

$$= \left[\mathbf{3}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\sqrt{\mathbf{5}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}\right)\left(\sqrt{\mathbf{5}}+\mathbf{1}\right)\right]\mathrm{u}$$

4)

Sia R le regione, indicata in figura, delimitata dal grafico di $f(\gamma)$ *e dalla retta* $y=\frac{5}{4}$. *Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione completa attorno all'asse* x.



Determiniamo le coordinate delle intersezioni H e K tra il grafico di $f(\gamma)$ e la *retta* $y=\frac{5}{4}$.

$$\begin{cases} \mathrm{f}(\gamma) = \mathrm{sen}\gamma - \cos\gamma + \dfrac{5}{4} = \sqrt{2}\cdot sen\left(\gamma-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{2}\cdot sen\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

$\sqrt{2}\cdot sen\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right)=0\,,\quad \gamma-\frac{\pi}{4}=0 \quad \Longrightarrow \boldsymbol{\gamma=\frac{\pi}{4}}$ oppure $\gamma-\frac{\pi}{4}=\pi \quad \Longrightarrow \boldsymbol{\gamma=\frac{5}{4}\pi}$

Pertanto le intersezioni tra le due curve hanno coordinate:

$H=\left(\frac{\pi}{4};\frac{5}{4}\right) \quad e \quad K=\left(\frac{5}{4}\pi;\frac{5}{4}\right)$

Il volume richiesto si ottiene calcolando:

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\text{sen}\gamma-\cos\gamma+\frac{5}{4}\right)^2 d\gamma-V(cilindro\ con\ raggio\ di\ base\ HL\ e\ altezza\ HK)=$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\left(sen^2\gamma+\cos^2\gamma+\frac{25}{16}-2sen\gamma cos\gamma+\frac{5}{2}sen\gamma-\frac{5}{2}cos\gamma\right)d\gamma-\pi R^2h=$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\quad\frac{41}{16}-sen2\gamma+\frac{5}{2}sen\gamma-\frac{5}{2}cos\gamma\right)d\gamma-\pi\frac{25}{16}\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\pi\left[\frac{41}{16}\gamma+\frac{1}{2}cos2\gamma-\frac{5}{2}cos\gamma-\frac{5}{2}sen\gamma\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}-\pi^2\frac{25}{16}=$$

$$=\pi\left[\frac{41}{16}\cdot\frac{5}{4}\pi+0+\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{41}{16}\cdot\frac{\pi}{4}+0-\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]-\pi^2\frac{25}{16}=$$

$$=\pi\left[\frac{205}{64}\pi+5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{41\pi}{64}-5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]-\pi^2\frac{25}{16}=\pi\left[\frac{164}{64}\pi+10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\pi^2\frac{25}{16}=$$

$$=\pi\left[\frac{41}{16}\pi+5\sqrt{2}\right]-\pi^2\frac{25}{16}=\left(\pi^2+5\sqrt{2}\,\pi\right)=\pi\left(\pi+5\sqrt{2}\right)u^3\cong 32.084\ u^3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri