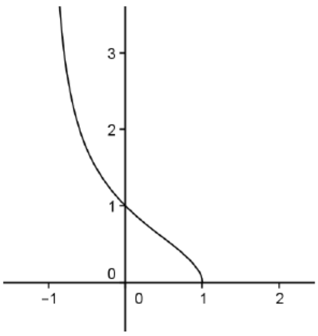
PNI 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1)

Si studi f e si verifichi che il suo grafico γ ha l'andamento riportato in figura. La funzione f è invertibile? Se sì, quale è l'espressione della sua inversa?



$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

Dominio

$\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ ... $\boldsymbol{-1 < x \leq 1}$

Simmetrie notevoli

$f(-x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$: la funzione non è pari né dispari.

Intersezioni con gli assi

Se x=0, y=1; se y=0, x=1.

Segno della funzione

$f(x) \geq 0$ *in tutto il dominio.*

Limiti

$\lim_{x\to(-1)^+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty \quad x = -1 \quad asintoto\ verticale.$

Essendo la funzione definita in un intervallo limitato, non possono esserci asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}(x+1)^2} < 0\ per\ ogni\ x\ del\ dominio$: funzione sempre decrescente.

La funzione non è derivabile in x=1.

$\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}(x+1)^2}\right) = -\infty$ (punto a tangente verticale).

Minimo (assoluto) 0 per x=1.

Derivata seconda

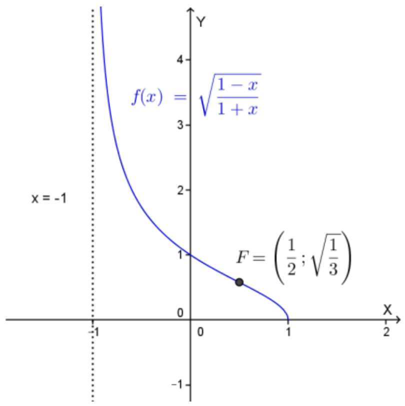
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{2x-1}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\,(x+1)^3}$$

$f''(x) \geq 0$ se $\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)} \geq 0, \quad -1 < x \leq \frac{1}{2}$; quindi:

il grafico volge la concavità verso l'alto se $-1 < x < \frac{1}{2}$ e verso il basso se $\frac{1}{2} < x < 1$

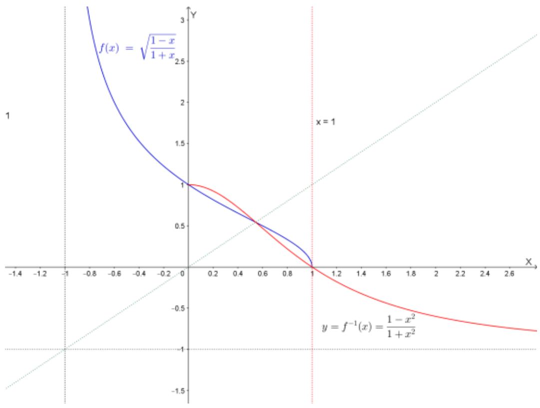
In $x = \frac{1}{2}$ si ha un flesso di ordinata $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



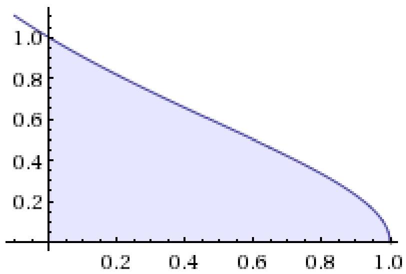
La funzione f è invertibile, poiché è strettamente decrescente.
Cerchiamo la sua funzione inversa

$f(x) = y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\quad y^2 = \frac{1-x}{1+x}$, $\quad y^2(1+x) = 1-x$, $\quad x(y^2+1) = 1-y^2$, $\quad x = \frac{1-y^2}{1+y^2} = f^{-1}(y)$



2)

Si mostri che l'area della regione Σ, *delimitata da* γ *e dagli assi cartesiani sull'intervallo chiuso [0,1] è uguale a* $\frac{\pi}{2} - 1$.



$$\boldsymbol{A(\Sigma) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx}$$

Cerchiamo una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ in [0;1], dove $1 - x \geq 0$.

$$\int \sqrt{\boldsymbol{\frac{1-x}{1+x}}}\boldsymbol{dx} = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \boldsymbol{\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}}$$

Quindi:

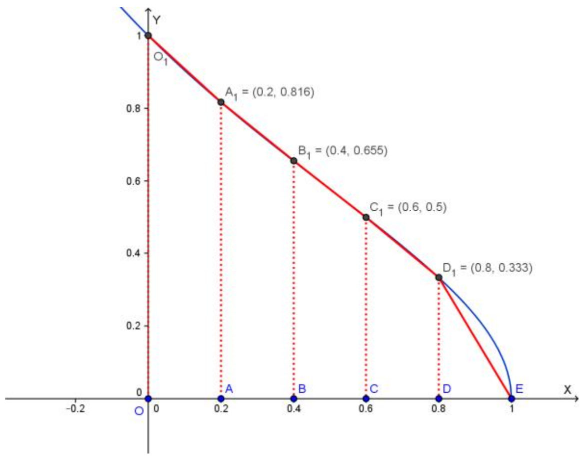
$$\int_0^1 \sqrt{\boldsymbol{\frac{1-x}{1+x}}}\,\boldsymbol{dx} = \left[\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 + (0-1) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1 \cong 057080}$$

3)

Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si sfrutti l'uguaglianza precedente per calcolare un'approssimazione di $\frac{\pi}{2}$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ e l'intervallo [0;1]; calcoliamo $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

utilizzando il **metodo dei trapezi**. Dividiamo l'intervallo in n=5 parti uguali.



$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \cong h\left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0 + h = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \cong 0.2 \cdot \left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)\right] =$$

$$= 0.2 \cdot \left[\frac{1+0}{2} + 0.816 + 0.655 + 0.5 + 0.33\right] \cong \mathbf{0.56}$$

Quindi: $\frac{\pi}{2} - 1 \cong 0.56 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \cong \mathbf{1.56}$ (N.B. Risulta $\frac{\pi}{2} \cong 1.57079\ldots$)

4)

La regione Σ è la base di un solido Ω, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di Ω.

Detta $S(x)$ l'area della sezione, risulta:

$$V(\Omega) = \int_0^1 S(x)dx$$

Ma il lato della generica sezione quadrata è $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, quindi $S(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

$$\boldsymbol{V(\Omega)} = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx = \int_0^1 \left(-\frac{1+x-2}{1+x}\right)dx = \int_0^1 -\left(1-\frac{2}{1+x}\right)dx =$$

$$= [-x + 2\, ln|1+x|]_0^1 = \boldsymbol{(-1 + 2\, ln(2))\, u^3 \cong 0.386\, u^3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri