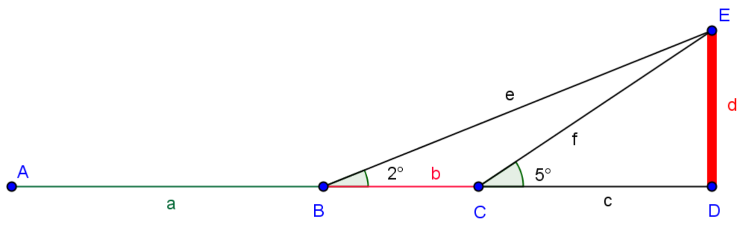
PNI 2014 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2°; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5°. Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto.



Detta v la velocità di marcia, il tempo per percorrere il tratto $b = BC$ è $t_b = 30'$ e risulta:

$b = v \cdot t_b = 30v$

Detto t_c il tempo necessario per percorrere il tratto $CD = c$ risulta:

$c = v \cdot t_c$

Risulta inoltre: $d = c \cdot tg5° = (b + c) \cdot tg2°$, da cui: $c = \frac{b \cdot tg2°}{tg5° - tg2°} = \frac{30v \cdot tg2°}{tg5° - tg2°}$; quindi:

$c = v \cdot t_c \quad \Longrightarrow \quad v \cdot t_c = \frac{30v \cdot tg2°}{tg5° - tg2°} \quad \Longrightarrow \quad t_c = \frac{30 \cdot tg2°}{tg5° - tg2°} \cong 19.929' \cong 20'$

Il tratto BD è quindi percorso in circa 50' e pertanto **il gruppo raggiungerà il cantiere alle ore 7 e 50 minuti**

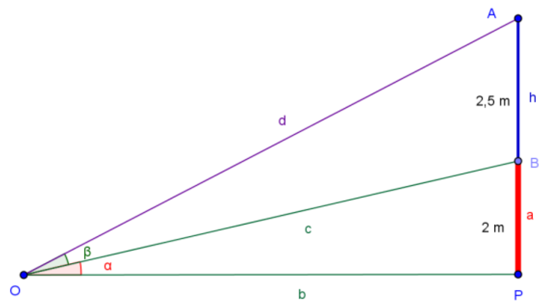
QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{(e^x - 1)^2}{3x^2 + 4x^3}$ *, quando x tende a 0.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x^2(3 + 4x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{3 + 4x} = 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

QUESITO 3

Sia $AB = 2{,}5\ m$ l'altezza di una statua e $BP = 2\ m$ l'altezza del piedistallo su cui essa poggia. Si determini sul piano orizzontale per il punto P d'appoggio del piedistallo il luogo dei punti tali che da essi la statua sia vista sotto angolo massimo.



Il luogo richiesto è la circonferenza del piano orizzontale per P di centro P e raggio b, essendo b la distanza del punto O del piano verticale per P da cui la statua è vista sotto angolo massimo.

Dobbiamo determinare la distanza b in modo che l'angolo $AOB = \beta$ assuma il valore massimo.
L'angolo APB è retto.

$$\begin{cases} a + h = b \cdot tg(\alpha+\beta) = 4{,}5 \\ a = b \cdot tg\alpha = 2 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{2}{tg\alpha} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = \frac{4{,}5}{tg(\alpha+\beta)} \\ b = \frac{2}{tg\alpha} \end{cases} \Longrightarrow \frac{4{,}5}{tg(\alpha+\beta)} = \frac{2}{tg\alpha}$$

$$4{,}5 \cdot tg\alpha = 2 \cdot tg(\alpha+\beta) = 2\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} \quad \Longrightarrow \quad 4{,}5 \cdot tg\alpha(1 - tg\alpha\, tg\beta) = 2tg\alpha + 2tg\beta$$

$$4{,}5 \cdot tg\alpha - 4{,}5 \cdot tg^2\alpha\, tg\beta = 2tg\alpha + 2tg\beta\ ; \qquad tg\beta = \frac{2{,}5 \cdot tg\alpha}{2 + 4{,}5 \cdot tg^2\alpha}$$

Poniamo per comodità $y = tg\beta \quad e \quad x = tg\alpha \quad \left(con\ x > 0, essendo\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.
L'angolo β è massimo quando lo è $y = tg\beta$. Analizziamo quindi la funzione:

$$y = \frac{2{,}5x}{2 + 4{,}5x^2} = \frac{5x}{4 + 9x^2}$$

Risulta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{5\,x}{4 + 9\,x^2}\right) = -\frac{5\,(9\,x^2 - 4)}{(9\,x^2 + 4)^2}$$

Quindi $y' > 0 \quad se \quad 9x^2 - 4 < 0 \quad cio$è: $-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$
Quindi y è crescente per $0 < x < \frac{2}{3}$ e decrescente per $x > \frac{2}{3}$: ha quindi massimo assoluto per $x = \frac{2}{3}$, e tale massimo è $y_{max} = (tg\beta)_{max} = \frac{5}{12}$.

L'angolo massimo sotto cui è vista la statua è $\beta = arct\left(\frac{5}{12}\right)$ e la distanza di O da P è:

$b = \frac{2}{tg\alpha} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3\ m.$

Il luogo richiesto è pertanto la circonferenza del piano orizzontale per P che ha centro in P e raggio 3 metri.

QUESITO 4

Si scrivano le equazioni della tangente e della normale al diagramma della funzione:

$$f(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}\right) ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x$$

nel punto P di ascissa x = 0.

Risulta $f(0) = 0$.
Calcoliamo la derivata della funzione:

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{1}{4}\right)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}\right) = \frac{-6x^2 + 3(x^2-1)\,x\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 4}{2(x^2-1)}$$

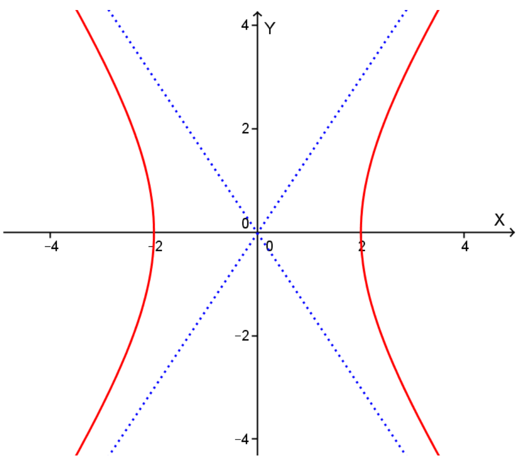
$f'(0) = -2$

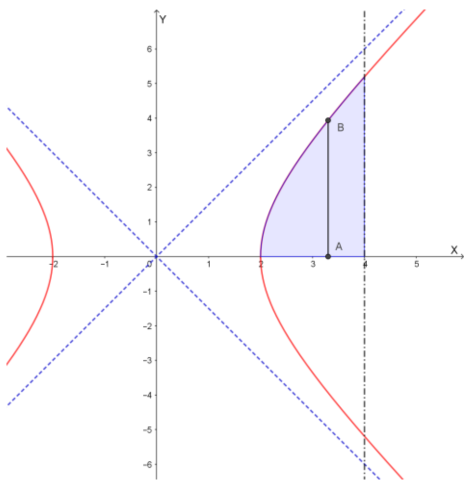
Equazione tangente in P: $y - 0 = -2(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -2x$
Equazione normale in P: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$

QUESITO 5

La regione del I quadrante delimitata dall'iperbole di equazione $9x^2 - 4y^2 = 36$ e dall'asse x nell'intervallo $2 \le x \le 4$, è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

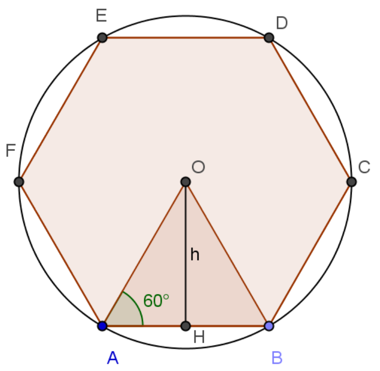
L'iperbole può essere scritta nella forma: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; si tratta quindi di un'iperbole riferita agli assi, con asse trasverso l'asse x e semiassi $a = 2\ e\ b = 3$. Il suo grafico è il seguente:





Il volume di S si ottiene calcolando il seguente integrale:

$\int_2^4 A(x)dx$, essendo $A(x)$ l'area dell'esagono regolare di lato $AB = y$, con y ordinata del punto B dell'iperbole e $2 < x < 4$.



$$A(x) = \frac{1}{2}(6 \cdot \overline{AB}) \cdot h = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AH} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \sqrt{3} = \\ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AB}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot y^2$$

Da $9x^2 - 4y^2 = 36$ ricaviamo $y^2 = \frac{9}{4}x^2 - 9$

Quindi: $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4}x^2 - 9\right) = \frac{27}{8}\sqrt{3}(x^2 - 4)$

Pertanto il volume del solido S è dato da:

$$V(S) = \int_2^4 A(x)dx = \int_2^4 \frac{27}{8}\sqrt{3}(x^2 - 4)dx = \frac{27}{8}\sqrt{3}\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^4 = \frac{27}{8}\sqrt{3} \cdot \frac{32}{3} = \\ = 36\sqrt{3}\,u^3 \cong 62.354\,u^3 = V(S)$$

QUESITO 6

Si determini in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo Ψ sotto il quale la curva di equazione

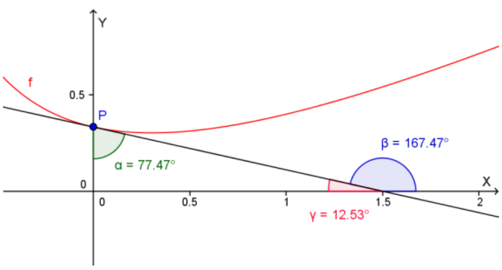
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$$

taglia l'asse delle y.

La curva taglia l'asse delle y nel punto $P = \left(0; \frac{1}{3}\right)$.
La tangente in P alla curva ha coefficiente angolare $m = f'(0)$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{2x + 3}\right) = \frac{2\left(x^2 + 3x - 1\right)}{(2x + 3)^2}$$

$m = f'(0) = -\frac{2}{9}$; quindi la tangente in P forma con il semiasse positivo dell'asse delle x



un angolo $\beta = arctg\left(-\frac{2}{9}\right) = 167.47°$.
L'angolo Ψ sotto cui la curva taglia l'asse delle y è il complementare α di $\gamma = 12.53°$ (supplementare di β).

Quindi $\Psi = \alpha = 77.47° = 77° + (0.47 \cdot 60)' = \\ = 77° + 28.2' = 77°28'$

QUESITO 7

Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

si calcoli un'approssimazione di $\frac{\pi}{4}$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$ e l'intervallo [-2;-1]; calcoliamo $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

utilizzando il **metodo dei trapezi**. Dividiamo l'intervallo in n=5 parti uguali.

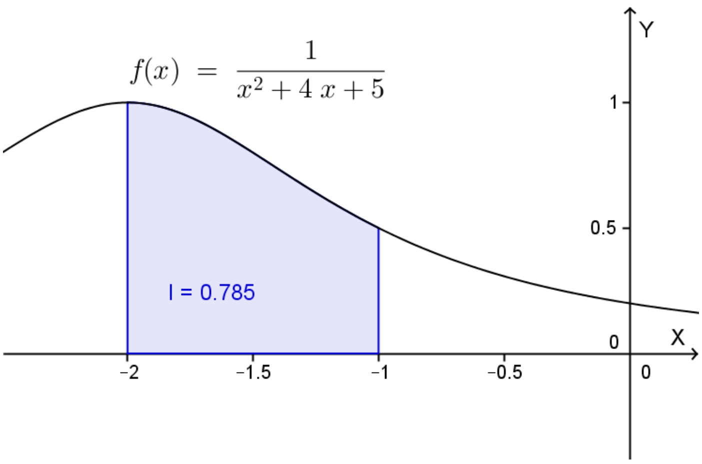
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \cong h\left[\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{-1-(-2)}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad x_0 = -2,\ x_1 = -2 + h = -1.8,\ x_2 = -1.6,\ x_3 = -1.4,$
$x_4 = -1.2,\ \ x_5 = -1$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \cong 0.2 \cdot \left[\frac{f(-2) + f(-1)}{2} + f(-1.8) + f(-1.6) + f(-1.4) + f(-1.2)\right] =$$

$$= 0.2 \cdot \left[\frac{1 + 0.5}{2} + 0.962 + 0.862 + 0.735 + 0.610\right] \cong \mathbf{0.784}$$

Quindi: $\frac{\pi}{4} \cong \mathbf{0.784}$ (N.B. Risulta $\frac{\pi}{4} =$ 0.78539 ...)



QUESITO 8

Si dica se è possibile che sia:

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Risulta:

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(k+1)(n-k)!} = \binom{n}{k}\frac{(n+1)}{(k+1)}$$

Quindi l'uguaglianza risulta verificata solo se $\frac{(n+1)}{(k+1)} = 1 \Longrightarrow \quad n+1 = k+1 \quad \Longrightarrow \quad n = k$

QUESITO 9

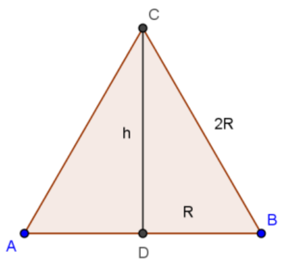
Un solido Ω è formato da un cilindro equilatero di raggio r e da due coni equilateri, aventi le basi coincidenti con quelle del cilindro ed esterni al cilindro. Se si sceglie a caso un punto all'interno di Ω , qual è la probabilità che tale punto risulti interno al cilindro?

La probabilità richiesta è data dal rapporto tra il volume "favorevole", quello del cilindro, ed il volume "possibile", quello del solido.

Ricordiamo che il cilindro equilatero ha il diametro di base uguale all'altezza.

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$

Il cono equilatero ha l'apotema uguale al diametro di base, quindi l'altezza h è data da:



$$h = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3$$

Il solido Ω ha volume: $2\pi R^3 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3\right) = 2\pi R^3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{V(cilindro)}{V(\Omega)} = \frac{2\pi R^3}{2\pi R^3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{3}{3+\sqrt{3}} \cong 0.634 = 63.4\ \%$$

QUESITO 10

Qual è il numero delle cinquine che si possono ottenere completando l'ambo {3,25}?

Basta contare le combinazioni (senza ripetizioni) a tre a tre che si possono fare con gli 88 numeri rimanenti:

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3!} = 109736$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri