Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO; LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

CALENDARIO BOREALE 2 – AMERICHE 2015

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $f(x) = (4x-2) \cdot e^{2x}$.

1)

Dimostra che la funzione possiede un unico punto di minimo e un unico punto di flesso. Calcola le coordinate del minimo e del flesso e traccia il grafico G_f *della funzione.*

Studiamo la funzione $f(x) = (4x-2) \cdot e^{2x}$.

Dominio: $-\infty < x < +\infty$

Intersezioni con gli assi:

Se $x = 0$: $y = -2$
Se $y = 0$: $(4x-2) \cdot e^{2x} = 0 \quad da\ cui \quad x = \frac{1}{2}$

Segno della funzione:

La funzione è positiva se $(4x-2) \cdot e^{2x} > 0$, $x > \frac{1}{2}$

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty}(4x-2) \cdot e^{2x} = 0^-$ (si ricordi il limite notevole $\lim_{x\to-\infty}(x \cdot e^{x}) = 0^-$).

$\lim_{x\to+\infty}(4x-2) \cdot e^{2x} = +\infty$; non c'è asintoto obliquo perché la funzione, per x che tende a più infinito, si comporta come $4x \cdot e^{2x}$, che non è un infinito del primo ordine.

Derivata prima:

$y' = 8x\boldsymbol{e}^{2x} \geq 0 \quad se \quad x \geq 0$: quindi la funzione è crescente se x>0 e decrescente se x<o; x=0 è quindi punto di minimo relativo (e assoluto), con ordinata $y = -2$.

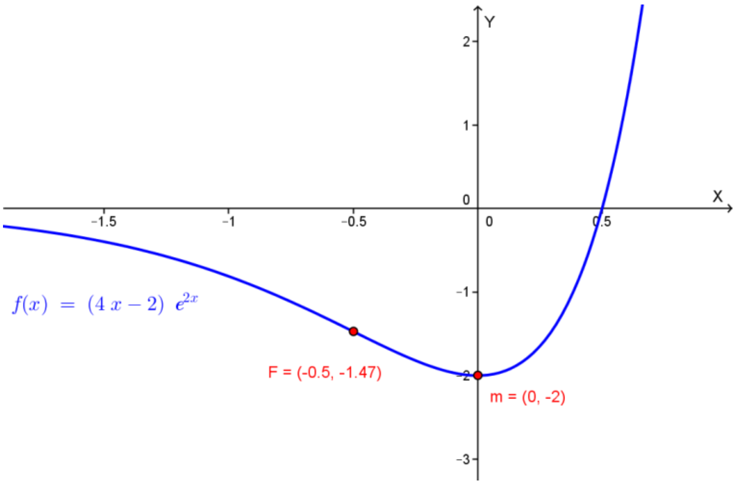
La funzione ammette quindi un unico punto di minimo m, con coordinate $m = (0; -2)$.

Derivata seconda:

$y'' = 16xe^{2x} + 8e^{2x} = 8e^{2x}(2x+1) \geq 0$ se $x \geq -\frac{1}{2}$: quindi il grafico di f volge la concavità verso l'alto se $x > -\frac{1}{2}$ e verso il basso se $x < -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{1}{2}$ è quindi l'unico punto di flesso, con ordinata $y = -4e^{-1} = -\frac{4}{e}$.

La funzione ammette un unico flesso F, di coordinate $F = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{e}\right)$.

Il grafico della funzione è il seguente:

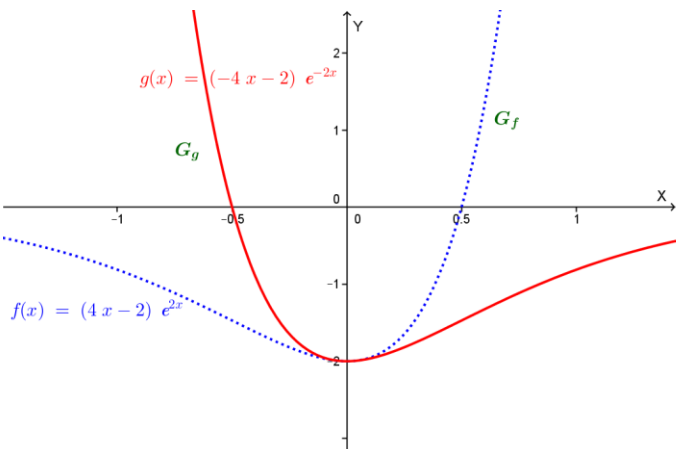


2)

Dimostra che la funzione $g(x) = (-4x-2) \cdot e^{-2x}$ è simmetrica a f rispetto all'asse y e tracciarne il grafico G_g.

La simmetrica di f rispetto all'asse delle y ha equazione che si ottiene scambiando x in –x, quindi l'equazione è: $f(-x) = (-4x-2) \cdot e^{-2x} = g(x)$

Il grafico G_g della g(x), affiancato a quello della f(x), è il seguente:



Verifichiamo se i due grafici hanno altre intersezioni oltre a quella sull'asse y:

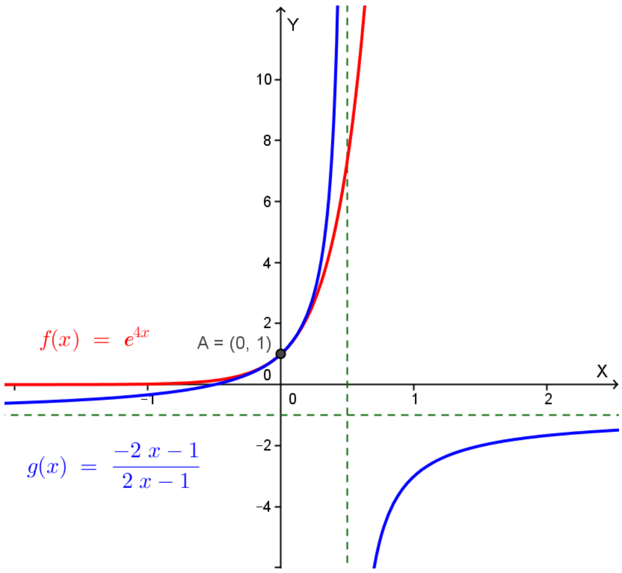
$$(4x-2)\cdot e^{2x} = (-4x-2)\cdot e^{-2x}, \quad e^{4x} = \frac{-4x-2}{4x-2} = \frac{-2x-1}{2x-1}$$

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le due curve:

$y = e^{4x}$: funzione esponenziale che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1.

$y = \frac{-2x-1}{2x-1}$: funzione omografica di centro $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, asintoti $x = \frac{1}{2}$ e $y = -1$, passante per il punto di coordinate $(0; 1)$.

Si ha la seguente situazione grafica:

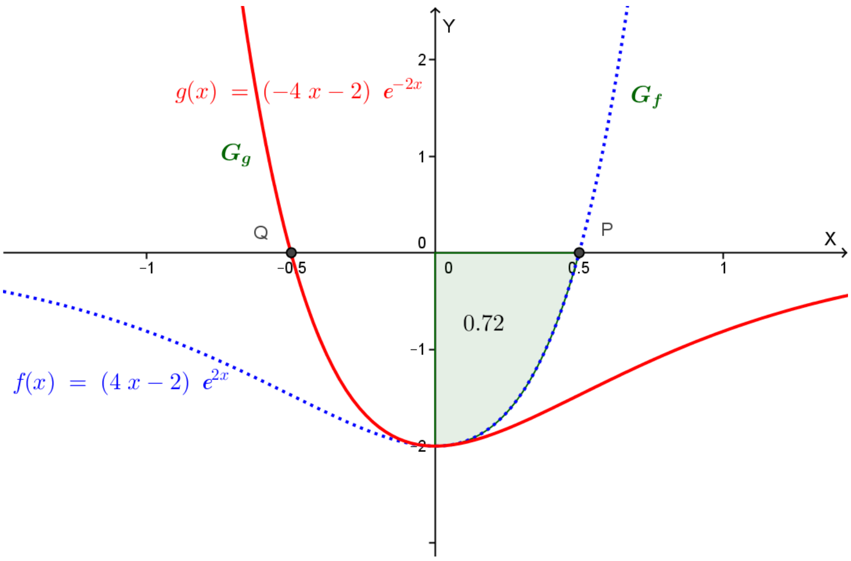


Si deduce dal grafico che le due curve si intersecano solo se x=0: quindi G_f e G_g hanno la sola intersezione (0;-2).

3)

Detti P e Q i punti di intersezione rispettivamente del grafico G_f e del grafico G_g con l'asse x, determina l'area A della porzione di piano delimitata dal segmento PQ e dai grafici G_f e G_g .

Per la simmetria verificata nel punto precedente l'area A richiesta è il doppio dell'area S della porzione di piano delimitata dagli assi cartesiani e dal grafico G_f; tale zona è nel quarto quadrante:



Risulta quindi:

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} (0 - f(x))dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} (4x-2)\cdot e^{2x}dx$$

Cerchiamo una primitiva di $(4x-2)\cdot e^{2x}$ integrando per parti:

$$\int (4x-2)\cdot e^{2x}dx = \int (2x-1)\cdot 2e^{2x}\,dx = \int (2x-1)\cdot (e^{2x})'\,dx =$$

$$= (2x-1)e^{2x} - \int 2\cdot e^{2x}\,dx = (2x-1)e^{2x} - e^{2x} = (2x-2)e^{2x}$$

Pertanto:

$$S = -\int_0^{\frac{1}{2}} (4x-2)\cdot e^{2x}dx = -[(2x-2)e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} = -[-e-(-2)] = e-2 \cong 0.718$$

L'area A richiesta è quindi:

$$A = 2S = 2\cdot (e-2)\,u^2 \cong 1.44\,u^2$$

4)

Sia f_a la famiglia di funzioni definite da $f_a(x) = (2ax - 2) \cdot e^{ax}$, con $a \in \Re - \{0\}$. Per ogni funzione f_a la tangente al grafico nel punto di flesso interseca l'asse x e l'asse y delimitando un triangolo rettangolo. Determina i valori di a per i quali tale triangolo è anche isoscele, spiegando il procedimento seguito.

Calcoliamo, per ogni a, la derivata prima della funzione:

$$f'_a(x) = 2a \cdot e^{ax} + (2ax - 2) \cdot e^{ax} \cdot a = 2a \cdot e^{ax}(ax) = 2a^2x \cdot e^{ax}$$

$$f''_a(x) = 2a^2[e^{ax} + x \cdot e^{ax}(a)] = 2a^2 \cdot e^{ax}(1 + ax)$$

Per $a \neq 0$ la derivata seconda si annulla per $x = -\frac{1}{a}$ e siccome il segno della derivata seconda è data dal fattore $1 + ax$, siccome quest'ultimo cambia il segno prima e dopo $x = -\frac{1}{a}$ (sia per a positiva che per a negativa), possiamo concludere che la funzione ammette uno ed un solo flesso per $x = -\frac{1}{a}$; l'ordinata del flesso è:
$f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = (-4) \cdot e^{-1} = -\frac{4}{e}$: $F = \left(-\frac{1}{a}; -\frac{4}{e}\right)$; notiamo che l'ordinata del flesso non dipende da a, quindi i flessi appartengono alla retta di equazione $y = -\frac{4}{e}$.

La tangente nel punto di flesso ha coefficiente angolare dato da:

$f'_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -2a \cdot e^{-1} = -\frac{2a}{e}$; la tangente nel punto di flesso ha quindi equazione:

$$y + \frac{4}{e} = -\frac{2a}{e}\left(x + \frac{1}{a}\right) \ , \ y = -\frac{2a}{e} \cdot x - \frac{6}{e}$$

Cerchiamo le intersezioni della tangente inflessionale con gli assi cartesiani:
Se $x = 0$, $y = -\frac{6}{e}$
Se $y = 0$, $x = -\frac{3}{a}$
Il triangolo rettangolo individuato dalla tangente inflessionale con gli assi cartesiani è anche isoscele se:

$$\left|-\frac{6}{e}\right| = \left|-\frac{3}{a}\right| \quad da\ cui\ \ \frac{3}{a} = \pm\frac{6}{e} \quad quindi: \ \ a = \pm\frac{e}{2}$$

Per $a = \frac{e}{2}$ la tangente inflessionale ha equazione: $y = -x - \frac{6}{e}$ che forma con gli assi cartesiani angoli di 45°.
Per $a = -\frac{e}{2}$ la tangente inflessionale ha equazione: $y = x - \frac{6}{e}$ che forma con gli assi cartesiani angoli di 45°.

Con la collaborazione di Angela Santamaria