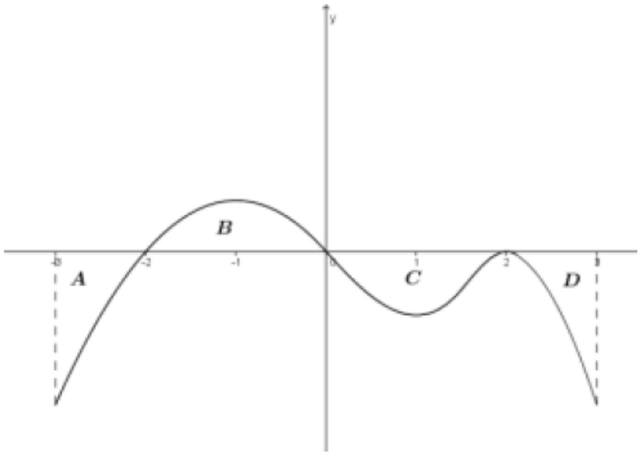
IB72 - SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2015

PROBLEMA 1

$y = f(x)$ è derivabile in [-3;3], risulta $f'(-1) = f'(1) = f'(2) = 0$.
Le aree di A, B, C e D sono rispettivamente: 2,3,3 e1. La funzione g(x) è una primitiva di f(x) tale che $g(3) = -5$



1)

Nel caso f(x) fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

Il grado minimo di f(x) è 4, poiché dal grafico si osserva che la funzione si annulla in -2, 0, 2 (due volte, vista la tangenza all'asse x).
L'equazione di f(x) potrebbe essere del tipo: $y = f(x) = a(x) \cdot x(x+2)(x-2)^2$, dove a(x) è un polinomio di grado maggiore o uguale a zero.

2)

Individua i valori di x appartenenti all'intervallo [−3, 3], per cui g(x) ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali g(x) volge la concavità verso l'alto.

Poiché g(x) è una primitiva di f(x) risulta: $g'(x) = f(x)$. Risulta:

$g'(x) > 0 \ \ dove\ f(x) > 0 \ \ quindi \ \ per \ \ -2 < x < 0$ (g crescente)
$g'(x) < 0 \ \ dove\ f(x) < 0 \ \ quindi \ \ per \ \ -3 < x < -2,\ 0 < x < 2,\ 2 < x < 3$:
(g decrescente)

Quindi g ha un massimo relativo per x=0 poiché cresce se $-2 < x < 0$
e decresce se $0 < x < 2$.

Cerchiamo ora dove g(x) volge la concavità verso l'alto.

Osserviamo che $g''(x) = f'(x) > 0$ dove f è crescente, quindi per:

$-3 < x < -1 \quad e \quad 1 < x < 2:$ in tali intervalli g(x) ha la concavità verso l'alto.

3)

Calcoliamo g(0).

Poiché la regione C ha area 3 ed f(x) è negativa tra 0 e 2, ricordando che g(x) è una primitiva di f(x), risulta:

$$\int_0^2 f(x)dx = -3 = [g(x)]_0^2 = g(2) - g(0) = -3$$

Ragionando in modo analogo sui valori noti delle aree e sul segno della f, e ricordando che g(3)=-5, si ha:

$$\int_2^3 f(x)dx = -1 = [g(x)]_2^3 = g(3) - g(2) = -5 - g(2) = -1 \quad da\ cui: \quad g(2) = -4$$

Da $g(2) - g(0) = -3$ otteniamo quindi: $-4 - g(0) = -3 \quad da\ cui \quad g(0) = -1$

Calcoliamo, se esiste il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; le funzioni presenti al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili in un intorno di zero ed inoltre la derivata del denominatore (2) non si annulla in un intorno di zero. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+g(x))'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2} = \frac{g'(0)}{2} = \frac{f(0)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Quindi il $\lim_{\mathrm{x}\to 0} \frac{1+\mathrm{g}(\mathrm{x})}{2\mathrm{x}}$ esiste ed è uguale a 0.

4)

Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$*; determiniamo il valore del seguente integrale:* $\int_{-2}^{1} h(x)dx$ *.*

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = \int_{-2}^{1} 3 \cdot f(2x+1)dx = 3\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx$$

Poniamo $2x+1 = t,\ \ da\ cui\ \ \ x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\ \ ,\ \ quindi\ \ \ dx = \frac{1}{2}dt$

Trasformiamo gli estremi di integrazione: $se\ \ x = -2\,,\ t = -3\ \ e\ \ \ se\ \ x = 1,\ \ \ t = 3$.

Quindi:

$$I = \int_{-2}^{1} h(x)dx = 3\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx = 3 \cdot \int_{-3}^{3} f(t) \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{3}{2} \cdot \int_{-3}^{3} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot [-Area(A) + Area(B) - Area(C) - Area(D)] = \frac{3}{2} \cdot [-2+3-3-1] = -\frac{9}{2}$$

L'integrale richiesto vale $-\frac{9}{2}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria