IB72 - SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2015

PROBLEMA 2

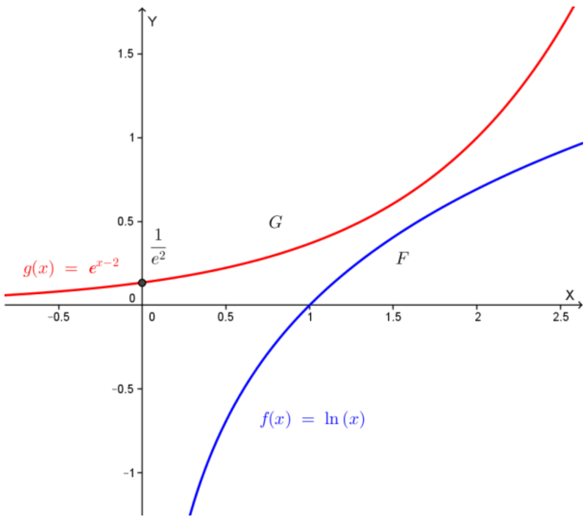
Assegnate le funzioni reali $f(x) = ln(x)$ *e* $g(x) = e^{x-2}$*, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:*

1)

stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni a(x)=f(g(x)) e b(x)=g(f(x)).

Il dominio della funzione $f(x) = ln(x)$ è: x>0; il suo codominio è tutto R (si veda il grafico). Il dominio della funzione $g(x) = e^{x-2}$ è tutto R; il suo codominio è y>0.

I grafici F e G sono di seguito indicati (notiamo che il grafico della g si ottiene dal grafico di $y = e^x$ mediante una traslazione verso destra di 2):



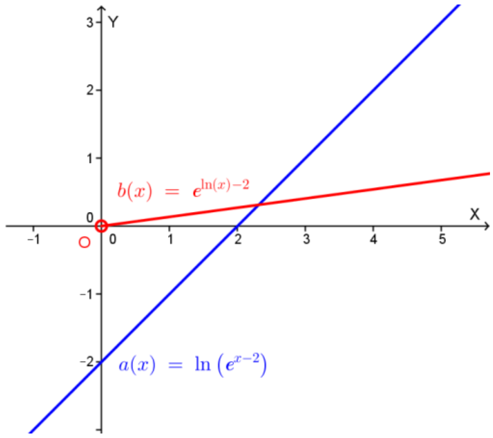
La funzione $a(x) = f(g(x))$ equivale a:

$a(x) = \ln(e^{x-2}) = x - 2$ (per ogni x).

La funzione $b(x) = g(f(x))$ equivale a:

$$b(x) = e^{\ln(x)-2} = e^{\ln(x)} \cdot e^{-2} = x \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \cdot x \quad (con\ \ x > 0).$$

I grafici di a(x) e b(x) sono i seguenti:



2)

Determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G.

F: $f(x) = ln(x)$; se $x = e^2$, $y = \ln(e^2) = 2$; $A = (e^2; 2)$

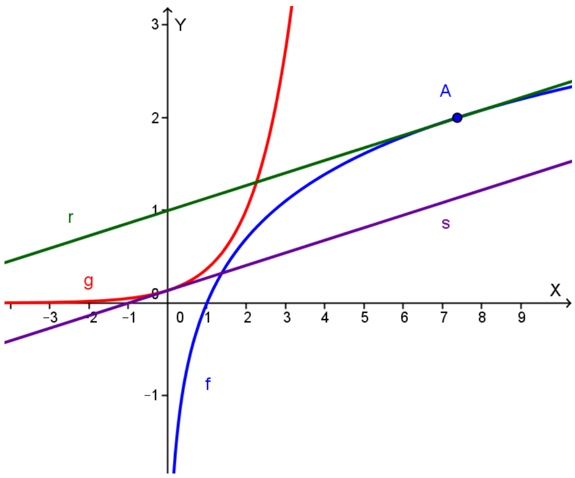
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $quindi$: $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$; la tangente r in A ad F ha quindi equazione:

r: $y - 2 = \frac{1}{e^2} \cdot (x - 2)$, $y = \frac{1}{e^2}x + 2 - \frac{2}{e^2}$

La generica retta parallela ad r ha equazione: $y = h(x) = \frac{1}{e^2}x + k$; vediamo se questa retta può essere tangente a G, che ha equazione: $g(x) = e^{x-2}$. Dovrà essere verificato il seguente sistema:

$$\begin{cases} h(x) = g(x) \\ h'(x) = g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{e^2}x + k = e^{x-2} \\ \frac{1}{e^2} = e^{x-2} \Rightarrow -2 = x - 2 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{e^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

La retta s parallela ad r e tangente a G esiste ed ha equazione s: $y = \frac{1}{e^2}x + \frac{1}{e^2}$



3)

Determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;

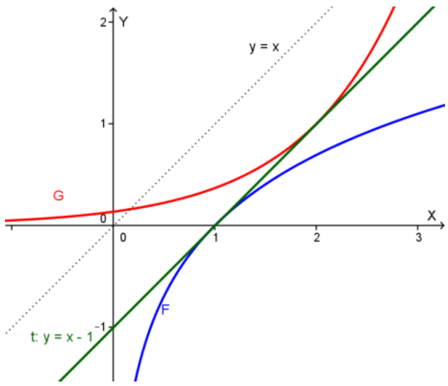
La generica retta parallela alla retta y=x ha equazione y=t(x)=x+q; questa retta è tangente al grafico F della funzione $f(x) = ln(x)$ se è soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} t(x) = f(x) \\ t'(x) = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + q = \ln(x) \\ 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + q = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La retta t ha quindi equazione $t: \ y = x - 1$ ed è tangente ad F nel punto $B = (1; 0)$.

Dimostriamo che t è tangente anche al grafico G di $g(x) = e^{x-2}$:

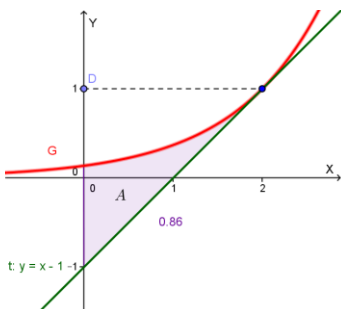
$$\begin{cases} t(x) = g(x) \\ t'(x) = g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = e^{x-2} \\ 1 = e^{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$: t è tangente a G nel punto (2;1).



4)

Detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

La regione A è indicata nel seguente grafico:



L'area della regione A si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(A)=\int_0^2 [e^{x-2}-(x-1)]\,dx=\int_0^2 (e^{x-2}-x+1))\,dx=\left[e^{x-2}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^2=$$

$$=1-2+2-(e^{-2})=\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\,u^2\cong 0.86\,u^2=Area(A).$$

Calcoliamo il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y .

Da $y=x-1$ ricaviamo $x=y+1$; da $y=e^{x-2}$ ricaviamo $x-2=\ln(y)$ da cui

$x=2+\ln(y)$.

Il volume richiesto si può ottenere sottraendo al cono di raggio 2 e altezza 2 il volume del solido generato dalla regione delimitata da G e dall'asse y, per y compreso fra $\frac{1}{e^2}$ e 1 (vedi figura precedente). Quindi:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2-\pi\int_{1/e^2}^{1}[2+\ln(y)]^2dy$$

Cerchiamo una primitiva di $(2+\ln(y))^2$:

Posto $t=\ln(y)$, $y=e^t$, $dy=e^t dt$ si ha (integrando per parti):

$$\int[2+\ln(y)]^2dy=\int(2+t)^2e^tdt=\int(2+t)^2(e^t)'dt=e^t(2+t)^2-\int 2(2+t)e^tdt=$$
$$=e^t(2+t)^2-2\int(2+t)(e^t)'dt=e^t(2+t)^2-2\left[(2+t)e^t-\int 1\cdot e^tdt\right]=$$
$$=e^t(2+t)^2-2(2+t)e^t+2e^t+c=e^t(t^2+2t+2)+c=y(\ln^2(y)+2\ln(y)+2)+c$$

Quindi:

$$V=\frac{8}{3}\pi-\pi\cdot[y(\ln^2(y)+2\ln(y)+2)]_{\frac{1}{e^2}}^{1}=\frac{8}{3}\pi-\pi\cdot\left[2-\frac{1}{e^2}(4-4+2)\right]=\frac{8}{3}\pi-\pi\left(2-\frac{2}{e^2}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{2\pi}{e^2}\right)\,u^3=2\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{e^2}\right)=\frac{2\pi}{3e^2}(e^2+3)\cong 2.945\,u^3=V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria