IB72 - SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2015

QUESITO 1

Determiniamo $y = f(x)$ *sapendo che il suo grafico è tangente alla retta* $y = -2x + 5$ *nel secondo quadrante e che risulta:* $f'(x) = -2x^2 + 6$.

Si ha:

$f(x) = \int(-2x^2 + 6)\ dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + k$ (*)

Inoltre deve essere $f'(x) = -2$ con x<0; quindi:

$-2x^2 + 6 = -2 \quad se \quad x = \pm 2\,, \quad per\ noi \quad x = -2$

Per x= -2 dall'equazione della retta troviamo y=4+5=9. Quindi la funzione passa per il punto di coordinate (-2;9). Imponiamo il passaggio per tale punto alla curva di equazione (*).

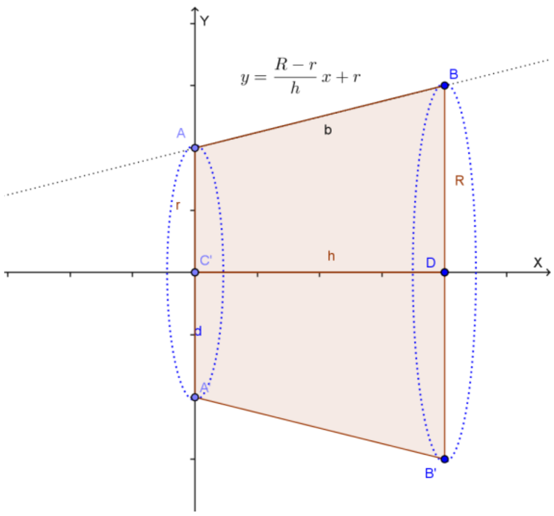
$9 = \frac{16}{3} - 12 + k \quad da\ cui \quad k = \frac{47}{3}$.

La funzione richiesta ha quindi equazione: $y = f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$

QUESITO 2

Si chiede di determinare la formula del volume del tronco di cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$



Il volume del tronco si può ottenere, per esempio, come volume del solido ottenuto dalla rotazione del segmento di estremi $(0; r)$ e $(h; R)$ attorno all'asse delle x; la retta passante per gli estremi del segmento ha equazione:

$y = \frac{R-r}{h}x + r.$

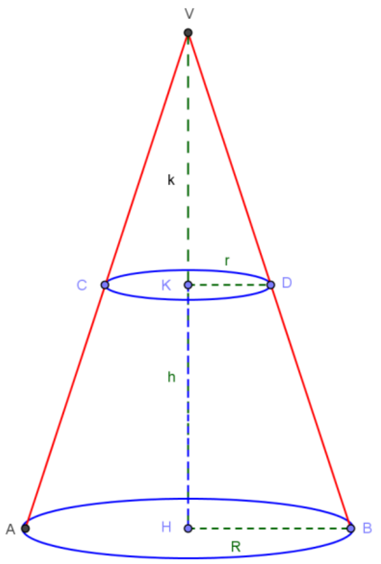
Il volume richiesto si ottiene quindi mediante il seguente integrale definito:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^h \left[\frac{R-r}{h}x + r\right]^2 dx = \pi \int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + r^2 + 2r \cdot \frac{R-r}{h}x\right] dx =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r^2x + \frac{r}{h} \cdot (R-r)x^2\right]_0^h = \pi\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \cdot \frac{h^3}{3} + r^2h + \frac{r}{h} \cdot (R-r)h^2\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{hr^2 + hRr + hR^2}{3}\right] = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r) = V$$

Dimostrazione geometrica



Indichiamo con V il vertice del cono C di cui fa parte il tronco e sia k l'altezza del cono C_1 che ha per base la base minore del tronco. Il volume del tronco si ottiene sottraendo al volume del cono C il volume del cono C_1.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli VHB e VKD si ha:

$$VH : VK = R : r \quad \Longrightarrow \quad (h+k) : k = R : r$$

Quindi: $r(h+k) = kR$, $\quad rh + rk - kR = 0$, $\quad k = \frac{rh}{R-r}$.

Si ha perciò:

$$V(C) = \frac{1}{3}\pi R^2(h+k) \qquad e \qquad V(C_1) = \frac{1}{3}\pi r^2 k$$

Segue che:

$$V(tronco) = V(C) - V(C_1) = \frac{1}{3}\pi R^2(h+k) - \frac{1}{3}\pi r^2 k =$$

$$= \frac{1}{3}\pi[R^2h + R^2k - r^2k] = \frac{1}{3}\pi[R^2h + k(R^2 - r^2)] = \frac{1}{3}\pi\left[R^2h + \frac{rh}{R-r}(R^2 - r^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[R^2h + \frac{rh}{R-r}(R-r)(R+r)\right] = \frac{1}{3}\pi[R^2h + rh(R+r)] = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2) = V$$

QUESITO 3

Risolvere l'equazione $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.

Dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$n+1 \geq 5 \implies n \geq 4 \quad e \quad n-1 \geq 4 \implies n \geq 5 : \quad quindi\ n \geq 5\ ed\ \ n\ intero$$

Sviluppando i coefficienti binomiali e ricordando che $n! = (n-1)!\,n$, si ha:

$$5 \cdot \frac{(n+1)!}{5!\,(n-4)!} = 21 \cdot \frac{(n-1)!}{4!\,(n-5)!} \implies \frac{(n-1)!\,(n)(n+1)}{4!\,(n-5)!\,(n-4)} = 21 \cdot \frac{(n-1)!}{4! \cdot (n-5)!}$$

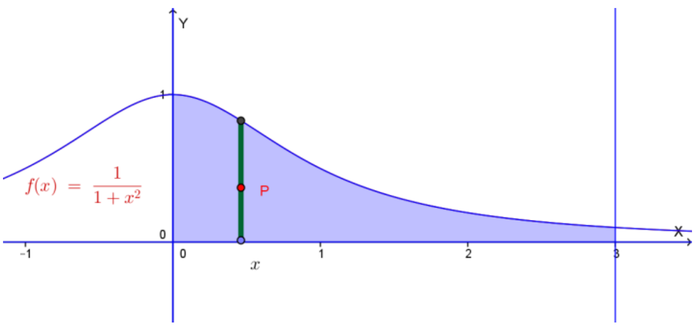
Semplificando otteniamo:

$$\frac{n(n+1)}{n-4} = 21 \quad , \quad n^2 + n = 21n - 84 \quad , \quad n^2 - 20n + 84 = 0 : \quad n = 6, \quad n = 14$$

Entrambe le soluzioni soddisfano le condizioni su n.

QUESITO 4

Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ *e l'asse delle x nell'intervallo [0, 3]. Per ogni punto P di R, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza 3x. Calcolare il volume del solido.*



Detta $A(x)$ l'area della sezione rettangolare, risulta;

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^3 A(x)dx \ ; \quad A(x) = 3x \cdot f(x) = \frac{3x}{x^2+1}\,.$$

$$V = \int_0^3 \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}[ln(x^2+1))]_0^3 \cong \frac{3}{2} ln\ 10\ \ u^3 \cong 3.454\ \ u^3 = V$$

QUESITO 5

Calcolare: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)$.

La Il limite si presenta nella forma indeterminata $[+\infty-\infty]$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-2}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x-2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5-(3x-2)}{\left(\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x-2}\right)}=0^+$$

QUESITO 6

$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2$

Si chiede di trovare il minimo della funzione (definita per tutti gli x reali).

Calcoliamo la derivata prima:

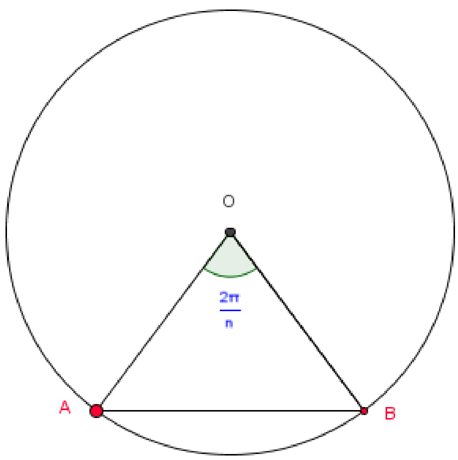
$f'(x)=10x-30\geq 0 \quad se \quad x\geq 3 \quad quindi:$

il grafico della funzione è crescente se x>3 e decrescente se x<3 ; pertanto:

il minimo assoluto della funzione si ha per x=3 ed è $f(3)=10$.

QUESITO 7

Indicando con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati, l'area $A(n)=S_n$ del poligono si ottiene moltiplicando per n l'area del triangolo AOB.



Essendo $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{n}$ e ricordando che l'area di un triangolo si può calcolare come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, si ha:

$$S_n = n \cdot \text{Area}(AOB) = n \cdot \left(\frac{1}{2} r \cdot r \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \frac{n}{2} r^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$, come richiesto.

Risulta:

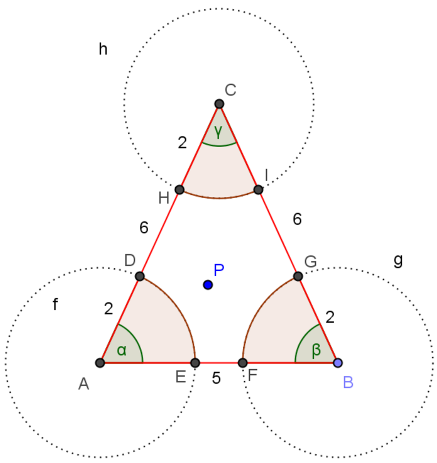
$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \frac{2\pi}{n} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \frac{2\pi}{n} \cdot 1 = \pi r^2$$

Come è noto, il limite ottenuto non è altro che l'area del cerchio.

QUESITO 8

I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?



La probabilità richiesta è data dal rapporto tra "l'area favorevole" e "l'area possibile".

Area favorevole= area triangolo – area dei tre settori circolari di centri A,B e C con raggi 2 e ampiezze pari agli angoli interni del triangolo;
la somma dei tre settori equivale ad un settore circolare di ampiezza 180° (la somma dei tre angoli) e raggio 2, quindi ad un semicerchio di raggio 2: $\frac{\pi}{2} \cdot r^2 = 2\pi$.

Per calcolare l'area del triangolo ABC, isoscele sulla base AB, troviamo l'altezza h relativa a tale base:

$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{119}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{119}$$

Quindi:

$$Area\ (ABC) = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{119}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{119}$$

$$Area\ (favorevole) = \ area(ABC) - area\ dei\ tre\ settori\ circolari = \frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi$$

Infine:

$$p = \frac{Area\ (favorevole)}{Area\ (possibile)} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \cong 0.539 \cong 54\%$$

QUESITO 9

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Dobbiamo determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0, 2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Determiniamo k in modo che la funzione sia continua in x=1: si verifica facilmente che la funzione è continua per ogni k, poiché il limite destro, il limite sinistro ed il valore che la funzione assume in 1 sono uguali (esattamente ad 1).

Dobbiamo imporre che la funzione sia derivabile in x=1. Risulta:

in $0 \le x < 1$: $f'(x) = 3x^2 \quad e \quad \lim_{x \to 1^-}(3x^2) = 3$
in $1 < x \le 2$: $f'(x) = 2x - k \quad e \quad \lim_{x \to 1^+}(2x - k) = 2 - k$

Dovrà essere: $2 - k = 3 \quad \Longrightarrow \quad k = -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Per tale valore di k la funzione è continua nell'intervallo chiuso [0;2] e derivabile nell'aperto (0;2): quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Pertanto esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)=\frac{5-0}{2}=\frac{5}{2}$$

Osserviamo che se x=1 la derivata della funzione vale 3, quindi c non può essere 1; se x è diverso da 1 otteniamo:

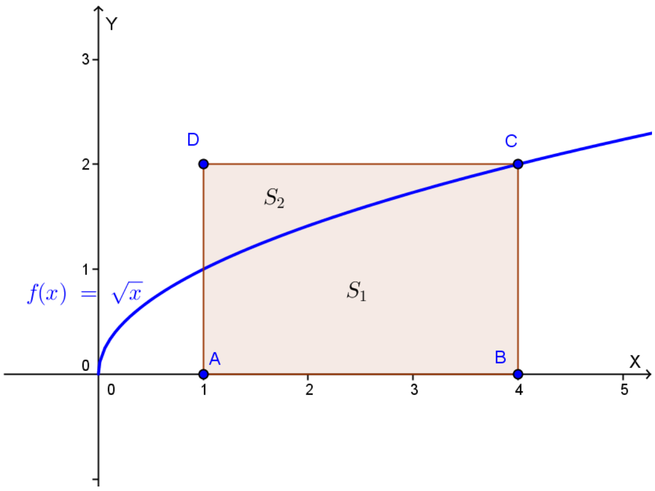
$$Se\ \ 0\le x<1:\ \ 3x^2=\frac{5}{2}\ ,\ \ x^2=\frac{5}{6}\quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}\quad quindi\quad c=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$Se\ \ 1<x\le 2:\ \ 2x+1=\frac{5}{2}\ ,\ \ 2x=\frac{3}{2}\ ,\ \ x=\frac{3}{4}\ \ non\ accettabile$$

Il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza è $c=\sqrt{\frac{5}{6}}$.

QUESITO 10

Rappresentiamo graficamente la funzione ed il rettangolo:



$$A(rettangolo)=3\cdot 2\ u^2=6\ u^2$$

$$S_1=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\ \ u^2$$

$S_2=6\ u^2-\frac{14}{3}\ u^2=\frac{4}{3}\,u^2$. Quindi: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{7}{2}$

Con la collaborazione di Angela Santamaria