Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO; LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

CALENDARIO BOREALE 1 – EUROPA 2015

PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in Figura 1 con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P, misurate negli istanti t =0 e t =10 (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14, 13)$ *e* $P_2(12, 11)$*. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti* $Q_1(12, -2)$ *e* $Q_2(11, -1)$*. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in Figura 1 (non in scala).*

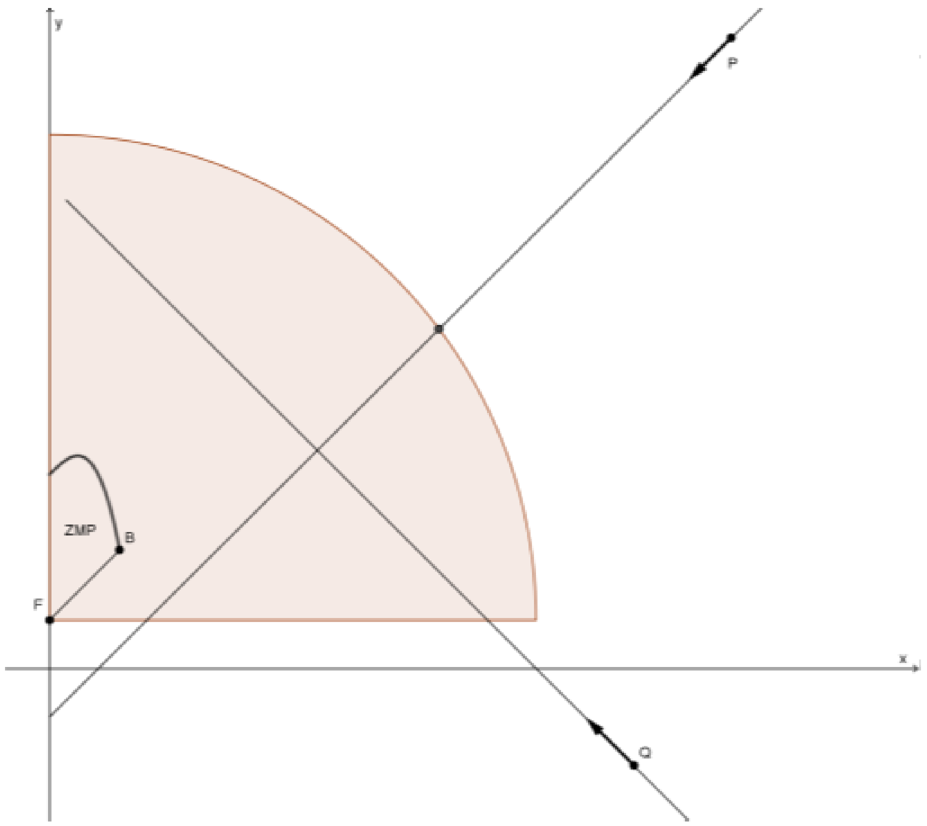

Figura 1

L'area indicata con ZMP è una "Zona Marittima Pericolosa". Il raggio luminoso di un faro posto nel punto F di coordinate (0, 1) spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi Figura 1).

1)

Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave P avvista per la prima volta il faro F, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.

L'equazione della traiettoria di P è data dalla retta passante per i punti $P_1(14,13)$ e $P_2(12,11)$; tale retta ha equazione: $y = x - 1$.

L'equazione della circonferenza di centro F=(0;1) e raggio 10 è:

$$x^2 + (y-1)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2y - 99 = 0$$

La posizione della nave P quando avvista per la prima volta il faro F si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + y^2 - 2y - 99 = 0 \\ 0 \le x \le 10 \quad ; \quad 1 \le y \le 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + (x-1)^2 - 2(x-1) - 99 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 96 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -6 \ \ (non\ accettabile), \quad x = 8.$$

Con $x = 8$ in $y = x - 1$ si ha $y = 7$; quindi la posizione della nave P quando avvista per la prima volta il faro F è $P_3 = (8;7)$. Determiniamo le equazioni del moto di P, che per t=0 si trova in $P_1(14,13)$ e per t=10 si trova in $P_2(12,11)$.

$$\begin{cases} x - x_0 = v_x(t - t_0) \\ y - y_0 = v_y(t - t_0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 12 - 14 = v_x(10 - 0) \\ 11 - 13 = v_y(10 - 0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = -\dfrac{2}{10} = -0.2 \\ v_y = -\dfrac{2}{10} = -0.2 \end{cases}$$

Quindi le equazioni del moto di P sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = 14 - 0.2t \\ y = 13 - 0.2t \end{cases}$$

Determiniamo l'istante in cui la nave P si trova quindi in $P_3 = (8;7)$:

$$\begin{cases} 8 = 14 - 0.2t \\ 7 = 13 - 0.2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{6}{0.2} = 30 \ \ (minuti)$$

Quindi la nave P avvista per la prima volta il faro F dopo 30 minuti.

La posizione di P quando si trova alla minima distanza dal faro si ottiene intersecando la retta che rappresenta la traiettoria di P con la retta per F perpendicolare alla traiettoria; tale perpendicolare è data dalla retta per F=(0;1) con coefficiente angolare -1, quindi ha equazione: $y - 1 = -x$, $y = -x + 1$. Determiniamo quindi la posizione richiesta di P:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad P_4 = (1;0): \ minima\ distanza\ dal\ faro.$$

La posizione $P_4 = (1;0)$ si ha nel tempo t ottenuto da $x = 14 - 0.2t$ con x=1:

$1 = 14 - 0{,}2t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{13}{0.2} = 65\ (minuti)$. Quindi:

Da quando P avvista per la prima volta il faro F (t=30), raggiunge la minima distanza da F dopo un tempo t pari a $(65 - 30) minuti = 35\ minuti$.

La minima distanza di P dal faro è data dalla distanza tra $P_4 = (1;0)$ ed $F = (0;1)$:

$(minima\ distanza\ di\ P\ da\ F) = P_4F = \sqrt{2}\ miglia\ nautiche \cong 1.41\ miglia\ nautiche$

2)

Determina la posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.

Determiniamo le equazioni del moto di Q, che per t=0 si trova in $Q_1(12,-2)$ e per t=10 si trova in $Q_2(11,-1)$.

$$\begin{cases} x - x_0 = v_x(t - t_0) \\ y - y_0 = v_y(t - t_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 11 - 12 = v_x(10 - 0) \\ -1 + 2 = v_y(10 - 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_x = -\frac{1}{10} = -0.1 \\ v_y = +\frac{1}{10} = 0.1 \end{cases}$$

Quindi le equazioni del moto di Q sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = 12 - 0.1t \\ y = -2 + 0.1t \end{cases}$$

Quindi le coordinate di P e Q in funzione del tempo t sono le seguenti:
$P = (14 - 0.2t; 13 - 0.2t), \quad Q = (12 - 0.1t; -2 + 0.1t)$

Dobbiamo trovare il primo istante in cui P dista da Q 9 miglia. Calcoliamo quindi la distanza PQ:

$$PQ = \sqrt{[(14 - 0.2t) - (12 - 0.1t)]^2 + [(13 - 0.2t) - (-2 + 0.1t)]^2} =$$

$= \sqrt{(2 - 0.1t)^2 + (15 - 0.3t)^2} = \sqrt{\frac{t^2}{10} - \frac{47t}{5} + 229} = 9$ da cui:

$\frac{t^2}{10} - \frac{47t}{5} + 229 = 81 \quad \Longrightarrow \quad t = 20\ minuti, \ \ t = 74\ minuti$.

P si trova per la prima volta a 9 miglia da Q dopo 20 minuti.

Determiniamo la posizione di P in tale istante:

$P = (14 - 0.2t; 13 - 0.2t) = (10; 9)$

3)

Determina l'istante t nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

Abbiamo visto nel punto precedente che la distanza tra le due navi, in funzione del tempo, è data da:

$d = \sqrt{\frac{t^2}{10} - \frac{47t}{5} + 229}$; *questa distanza è minima se lo è:*

$$z = \frac{t^2}{10} - \frac{47t}{5} + 229 \; , \quad con \;\; t \geq 0$$

Questa equazione rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto; il minimo si trova nel vertice (se appartiene al dominio della t). Cerchiamo l'ascissa t del vertice:

$t_V = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{47}{5}}{\frac{1}{5}} = 47$: la distanza tra le due navi è quindi minima dopo 47 minuti.
Calcoliamo la distanza minima:

$$d = \sqrt{\frac{t^2}{10} - \frac{47t}{5} + 229} = 2.85 \text{ miglia}$$

La minima distanza tra le due navi è quindi 2.85 miglia.

Nel punto $B(X_B, Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni f e g che si intersecano nel punto B e sono definite da:

$f(x) = -x^3 + x + 4, \quad x \in \Re, \quad 0 \leq x \leq x_B$

$g(x) = x + 1, \quad\quad x \in \Re, \quad 0 \leq x \leq x_B$

e dalla retta x = 0.

4)

Calcola l'area della ZMP.

Determiniamo le coordinate del punto B, intersezione di f e g nel primo quadrante:

$$\begin{cases} y = -x^3 + x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -x^3 + x + 4 = x + 1 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{3} \cong 1.442$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{3} \cong 1.442 \\ y = \sqrt[3]{3} + 1 \cong 2.442 \end{cases}$$

L'area della ZMP si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(ZMP) = \int_0^{\sqrt[3]{3}} [(-x^3 + x + 4) - (x + 1)]\, dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} (-x^3 + 3) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 3x\right]_0^{\sqrt[3]{3}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 + 3\left(\sqrt[3]{3}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{3^4} + 3\sqrt[3]{3} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = \frac{9}{4}\sqrt[3]{3} \cong 3.25\ miglia^2$$

L'area della ZMP vale quindi $\frac{9}{4}\sqrt[3]{3}\, miglia^2 \cong 3.25\ miglia^2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria