Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO; LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

CALENDARIO BOREALE 1 – EUROPA 2015

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$.

1)

Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2.

$$f(x) = ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$$

Imponiamo il passaggio per l'origine:

$$0 = ln\left(\frac{a}{4}\right), \quad \frac{a}{4} = 1, \quad a = 4$$

Con tale valore di a la funzione diventa:

$$f(x) = ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + bx, \qquad continua\ e\ derivabile\ per\ \ 4-x > 0\ \ cioè\ \ x < 4\ .$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{4+8x-x^2+b\left(-16+4x-4x^2+x^3\right)}{(-4+x)\left(4+x^2\right)}$$

Imponiamo che la derivata si annulli per x=2 (dove è derivabile)

$$\frac{4+16-4+b(-16+8-16+8)}{2\cdot 8} = 0\ , \qquad \frac{16-16b}{16} = 0\ , \quad b = 1$$

La funzione richiesta ha quindi equazione:

$$f(x) = ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x$$

2)

Trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti.

L'espressione analitica della funzione è:

$$f(x) = ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x$$

Il suo campo di esistenza è: $-\infty < x < 4$

Determiniamo gli eventuali asintoti.

$$\lim_{x\to 4^-}\left[ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right] = -\infty : \quad x = 4 \quad asintoto\ verticale\,.$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right] = -\infty : \ può\ esserci\ asintoto\ obliquo\ (no\ orizzontale).$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left[ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x\right]\cdot\frac{1}{x} = \left[F.I.\ \frac{\infty}{\infty}\right]$$

Posto

$f(x) = ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x$ e $g(x) = x$ calcoliamo le rispettive derivate:

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2-8x-4}{(4-x)(x^2+4)}, \qquad g'(x) = 1$$

Notiamo che le funzioni f e g sono continue in un intorno di $-\infty$, sono ivi derivabili e la derivata della g non si annulla in tale intorno; inoltre il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; possiamo quindi applicare la regola di de L'Hôpital. Calcoliamo, se esiste, il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1+\frac{x^2-8x-4}{(4-x)(x^2+4)}}{1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^3}{-x^3} = 1 = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = m$$

$$\lim_{x\to -\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to -\infty}\left[ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x - x\right] = -\infty$$

Quindi non esiste asintoto obliquo.

3)

Determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y.

L'equazione della tangente alla curva nell'origine è:

$y-0=f'(0)\cdot(x-0)$; risulta: $f'(0)=1+\frac{-4}{16}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; quindi: $y=\frac{3}{4}x$

$$f'(x)=\ 1+\frac{x^2-8x-4}{(4-x)(x^2+4)}=\frac{16-4x+4x^2-x^3+x^2-8x-4}{(4-x)(x^2+4)}=\frac{-x^3+5x^2-12x+12}{(4-x)(x^2+4)}$$

Ricordiamo che la derivata si annulla in x=2, quindi $-x^3+5x^2-12x+12$, si può scomporre con la regola di Ruffini in:

$$-x^3+5x^2-12x+12=-(x-2)(x^2-3x+6)$$

Ricordando che x<4, risulta 4-x>0, quindi $f'(x)\geq 0$ se $-(x-2)(x^2-3x+6)\geq 0$

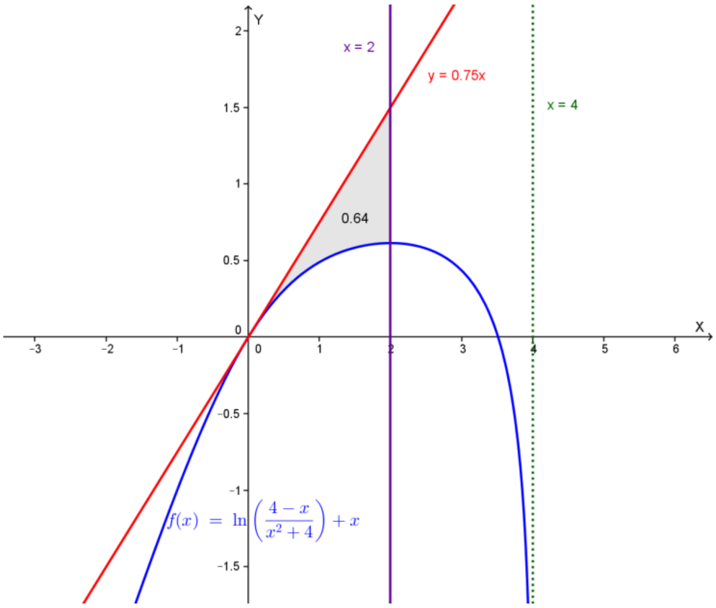
Poiché il delta di (x^2-3x+6) è negativo, il trinomio è sempre positivo. Pertanto:

$f'(x)\geq 0$ se $-(x-2)\geq 0\,,\ -x+2\geq 0\,,\ x\leq 2$

La funzione è quindi crescente se x<2 e decrescente se 2<x<4: in x=2 abbiamo quindi un massimo relativo, che è anche massimo assoluto; tale massimo vale:

$$f(2)=ln\frac{1}{4}+2=2-ln4\approx 0.6$$

Rappresentiamo graficamente qualitativamente la funzione f insieme alla tangente nell'origine ed alla parallela all'asse delle y passante per il punto di massimo (x=2):



L'area richiesta si ottiene attraverso il seguente integrale definito:

$$Area = \int_0^2 \left[\frac{3}{4}x - ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) - x\right] dx = \int_0^2 \left[-ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) - \frac{1}{4}x\right] dx =$$

Integrando per parti si ottiene:

$$I = \int ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)\, dx = \int (x)' \cdot ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)\, dx = xln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) - \int x \cdot \frac{x^2-8x-4}{(4-x)(x^2+4)}\, dx =$$

$$= \ xln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) - \int \frac{x^3-8x^2-4x}{16-4x+4x^2-x^3}\, dx$$

Eseguendo la divisione del polinomio $x^3 - 8x^2 - 4x$ per il polinomio $16 - 4x + 4x^2 - x^3$

si ottiene come quoziente $q(x) = -1$ e come resto $r(x) = -4x^2 - 8x + 16$

Quindi:

$$\frac{x^3-8x^2-4x}{16-4x+4x^2-x^3} = -1 + \frac{-4x^2-8x+16}{16-4x+4x^2-x^3} = -1 + \frac{-4x^2-8x+16}{(4-x)(x^2+4)} =$$
$$= -1 + \frac{4x^2+8x-16}{(x-4)(x^2+4)}$$

$$\frac{4x^2+8x-16}{(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+c}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(x-4)(Bx+C)}{(x-4)(x^2+4)} \quad da\ cui:$$

$$(A+B)x^2 + (C-4B)x + 4A - 4C = 4x^2 + 8x - 16 \quad quindi:$$

$$\begin{cases} A+B=4 \\ C-4B=8 \\ 4A-4C=-16 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=4 \\ B=0 \\ C=8 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3-8x^2-4x}{16-4x+4x^2-x^3}\, dx =$$
$$= \int \left(-1 + \frac{4}{x-4} + \frac{8}{x^2+4}\right) dx = -x + 4\ln|x-4| + 4\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx =$$

$$= -x + 4\ln(4-x) + 4arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Ed infine:

$$I = \ xln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x - 4\ln(4-x) - 4arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Quindi:

$$Area = \int_0^2 \left[-ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) - \frac{1}{4}x\right]dx = -\int_0^2 \left[ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + \frac{1}{4}x\right]dx =$$

$$= -\left[xln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x - 4\ln(4-x) - 4arctg\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}x^2\right]_0^2 =$$

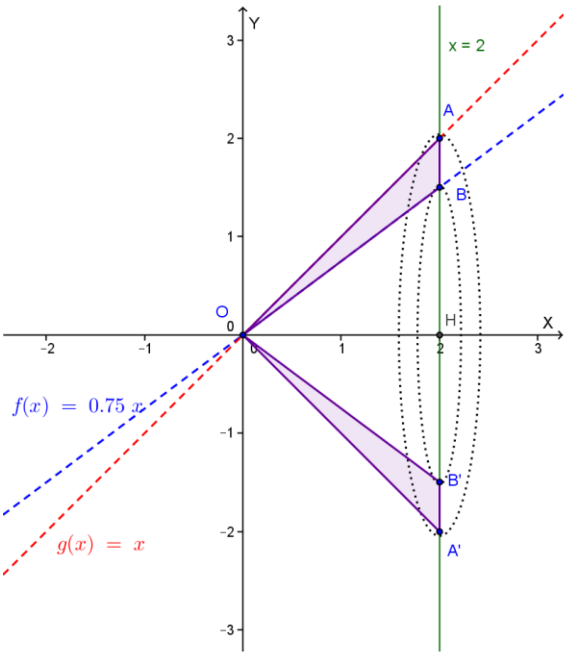
$$= -\left[2ln\left(\frac{1}{4}\right) + 2 - 4ln2 - 4arctg(1) + \frac{1}{2} - (-4ln4)\right] =$$

$$= -\left[-2ln4 + \frac{5}{2} - 4ln2 - 4\cdot\frac{\pi}{4} + 4ln4\right] = -\left[-4ln2 + \frac{5}{2} - 4ln2 - \pi + 8ln2\right] =$$

$$= -\left[\frac{5}{2} - \pi\right] = \left(\pi - \frac{5}{2}\right)\ u^2 \cong 0.64\ u^2 = Area$$

4)

Calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla tangente in O, dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y.



Il volume del solido richiesto si ottiene sottraendo al volume del cono di raggio AH=2 e altezza OH=2 il volume del cono di raggio BH=3/2 e altezza OH=2.

Quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot OH - \frac{1}{3}\pi BH^2 \cdot OH =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot OH \cdot (AH^2 - BH^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 2 \cdot \left(4 - \frac{9}{4}\right) = \frac{7}{6}\pi\ u^3 \cong 3.665\ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria