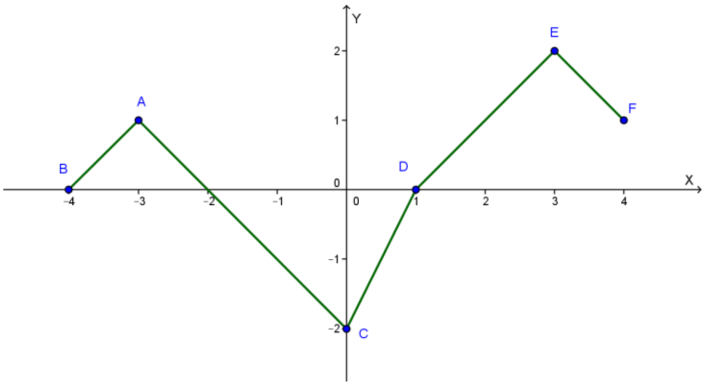
Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO; LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

CALENDARIO BOREALE 1 – EUROPA 2015

QUESITO 1



La funzione f(x) è continua per $x \in [-4; 4]$ *il suo grafico è la spezzata passante per i punti: (-4, 0), (-3, 1), (-2, 0), (0, -2), (1, 0), (3, 2), (4, 1).*
Qual è il valor medio di f(x) per $x \in [-4; 4]$ *?*

Per il "teorema della media" il valor medio richiesto è dato da:

$$valore\ medio = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{4+4} \cdot \int_{-4}^{4} f(x)dx = \frac{1}{8} \cdot \left[\int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{(1+2) \cdot 1}{2} \right] = \frac{1}{8}\left(1 - 3 + 2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} = valor\ medio$$

N.B. Nel calcolo dei singoli integrali si è tenuto conto del significato geometrico dell'integrale definito.

QUESITO 2

Da un'analisi di mercato è risultato che il 32% della popolazione usa il prodotto A. Scelto a caso un gruppo di 12 persone, determinare il valore medio, la varianza e la deviazione standard della variabile casuale X = «numero di persone che usa il prodotto A». Calcolare inoltre la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.

La probabilità p che una persona usi il prodotto A è data da: $p = 0.32$; la probabilità q che non la usi è data da: $q = 1 - p = 1 - 0.32 = 0.68$.

La variabile casuale X può assumere i seguenti valori:

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{x_0, x_1, \cdots, x_{12}\}$

Calcoliamo le probabilità che X assuma i valori 0, 1, 2, …, 11,12.

$p_0 = p(X = x_0) = p(X = 0)$: probabilità che su 12 persone 0 usino il prodotto A.

$p_0 = \binom{12}{0} p^0 q^{12} = \binom{12}{0} \cdot 0.32^0 \cdot 0.68^{12} \cong 0.0098$

In modo analogo si calcolano le altre probabilità:

$p_1 = \binom{12}{1} p^1 q^{11} = 12 \cdot 0.32 \cdot 0.68^{11} \cong 0.0552$

$p_2 = \binom{12}{2} p^2 q^{10} = 66 \cdot 0.32^2 \cdot 0.68^{10} \cong 0.1429$

$p_3 \cong 0.2241$, $p_4 \cong 0.2373$, $p_5 \cong 0.1787$, $p_6 \cong 0.0981$, $p_7 \cong 0.0396$, $p_8 \cong 0.0116$

$p_9 \cong 0.0024$, $p_{10} \cong 0.0003$, $p_{11} \cong 0.0000$, $p_{12} \cong 0.0000$

Il valor medio m è dato da:

$m(X) = x_0 p_0 + x_1 p_1 + \cdots + x_{11} p_{11} + x_{12} p12 \cong 0 \cdot 0.0098 + 1 \cdot 0.0552 + 2 \cdot 0.1429 +$

$+ \cdots + 11 \cdot 0.0000 + 12 \cdot 0.0000 \cong 3.84$

N.B. Tale valore può essere calcolato più velocemente come il 32% di 12; infatti:

$\frac{32}{100} \cdot 12 = 3.84$

La varianza è data da:

$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=0}^{12} (x_i - m)^2 \cdot p_i = m(X^2) - m^2 = \cdots =$2,6112

La deviazione standard è data da:

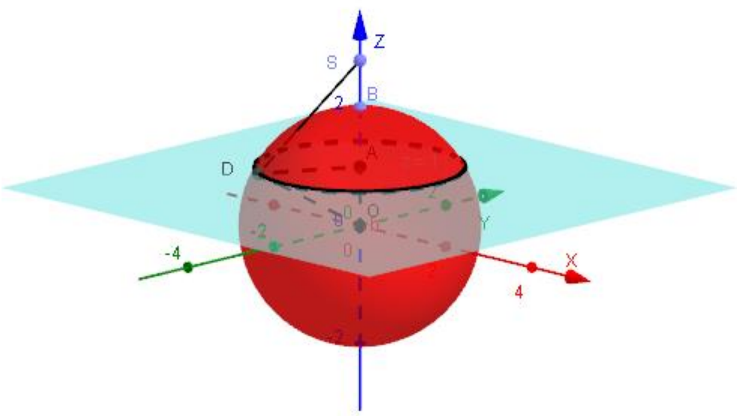
$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}6112} = 1{,}6159$

Calcoliamo infine la probabilità che, all'interno del gruppo scelto, il numero di persone che usano detto prodotto sia compreso tra 2 e 5, estremi inclusi.

$p(2 \leq X \leq 5) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(x = 5) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 =$
$= 0.1429 + 0.2241 + 0.2373 + 0.1787 = 0.783 \cong 78.3\%$

QUESITO 3

In un riferimento cartesiano Oxyz, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e del piano $z = 1$ ha centro in (0,0,1) e raggio $\sqrt{3}$. Si immagini che una sorgente di luce puntiforme S sia situata sul semiasse positivo delle z. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare S affinché γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?



Nel piano z=1 la circonferenza γ ha equazione: $x^2 + y^2 = 3$ che ha centro in A=(0,0,1) e raggio $\sqrt{3}$.

Poniamo $S = (0,0,t), con\ t > 2$; la circonferenza γ è il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra quando il raggio di luce SD tangente alla sfera incontra la circonferenza in D. Consideriamo il triangolo SDA, con A centro della circonferenza, rettangolo in A. Risulta:

$SD^2 = SA^2 + DA^2, \quad SD^2 = (t-1)^2 + 3 = t^2 - 2t + 4$

Ma Anche il triangolo SDO è rettangolo (in D), perché SD è tangente alla sfera, quindi:

$SD^2 = SO^2 - OD^2 = t^2 - 4$

Pertanto:

$t^2 - 2t + 4 = t^2 - 4\,,\ \ da\ cui;\ \ \ t = 4.$

Il punto S richiesto dista quindi 4 dal centro della sfera.

N.B.

Osservato che il triangolo SDO è rettangolo in D e che AD è l'altezza relativa all'ipotenusa, applicando il secondo teorema di Euclide si ottiene più velocemente t.
Si ha infatti: $DA^2 = AO \cdot SA\,,\ \ 3 = 1 \cdot SA\,,\ \ SA = 3\,,\ \ t - 1 = 3,\ \ t = 4\ .$

QUESITO 4

Sia $P(x) = x^2 + bx + c$*. Si suppone che* $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ *e che* $P(1) \neq P(2)$.
Calcolare $P(0)$.

Risulta: $P(1) = 1 + b + c\ ,\quad P\big(P(1)\big) = (1 + b + c\,)^2 + b(1 + b + c\ \,) + c$

$P(2) = 4 + 2b + c\ ,\quad P\big(P(2)\big) = (4 + 2b + c\,)^2 + b(4 + 2b + c\ \,) + c$

$P(0) = c$

$1 + b + c \neq 4 + 2b + c \quad \Longrightarrow \quad b \neq -3$

$$\begin{cases} (1 + b + c\,)^2 + b(1 + b + c\ \,) + c = 0 \\ (4 + 2b + c\,)^2 + b(4 + 2b + c\ \,) + c = 0 \\ b \neq -3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2b^2 + 3bc + 3b + c^2 + 3c + 1 = 0 \\ 6b^2 + 5bc + 20b + c^2 + 9c + 16 = 0 \\ b \neq -3 \end{cases}$$

Sottraiamo alla seconda equazione la prima:

$$\begin{cases} 2b^2 + 3bc + 3b + c^2 + 3c + 1 = 0 \\ 4b^2 + 2bc + 17b + 6c + 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(2b + 6) = -4b^2 - 17b - 15 \\ b \neq -3 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo (con $b \neq -3$, come previsto per ipotesi):

$$c = \frac{-4b^2 - 17b - 15}{2(b + 3)} = \frac{-(b+3)(4b+5)}{2(b + 3)} = -\frac{4b + 5}{2} = P(0)$$

$$2b^2+3b\left(-\frac{4b+5}{2}\right)+3b+\left(-\frac{4b+5}{2}\right)^2+3\left(-\frac{4b+5}{2}\right)+1=0$$

Questa equazione ha come soluzione $b=-\frac{1}{2}$; risulta quindi:

$$P(0)=c=-\frac{4b+5}{2}=-\frac{-2+5}{2}=-\frac{3}{2}$$

QUESITO 5

Risolvere l'integrale improprio: $\int_0^1 \ln(x)\,dx$.

La funzione $f(x)=\ln(x)$ è continua per x>0, quindi nell'intervallo di integrazione non è continua nell'estremo inferiore 0: si tratta quindi di un integrale improprio.

Calcoliamo una primitiva di f(x) integrando per parti:

$$\int \ln(x)\,dx=\int (x)'\cdot\ln(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=$$

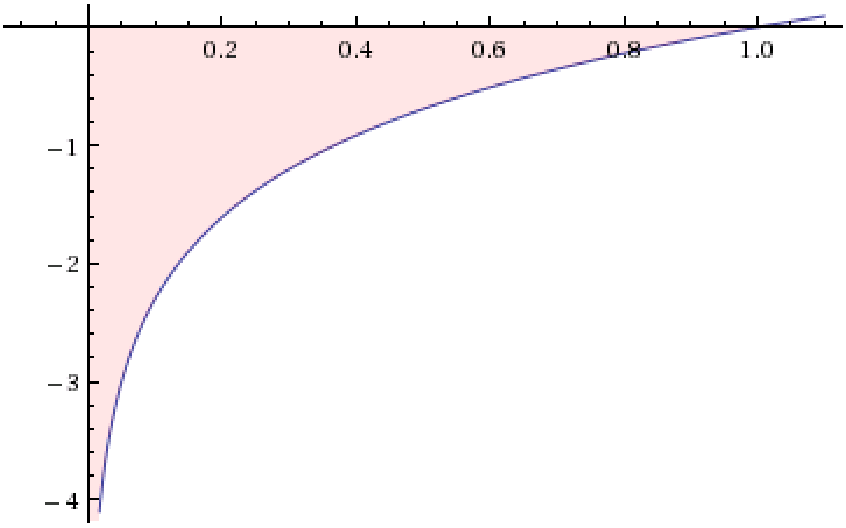
$$=\ x\cdot\ln(x)-x+c$$

Pertanto:

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln(x)\,dx=\lim_{a\to 0^+}[\,x\cdot\ln(x)-x]_a^1=\lim_{a\to 0^+}[-1-(a\cdot\ln(a)-a)]=-1$$

Ricordiamo che $\lim_{a\to 0^+} a\cdot\ln(a)=0$.

L'integrale richiesto è rappresentato graficamente nella seguente figura:



QUESITO 6

La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo $t = 0$ e di 6500 al tempo $t = 3$. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo $t = 10$, la popolazione supererà i 20000 batteri?

Risolviamo l'equazione differenziale a variabili separabili $\frac{dy}{dt} = k \cdot y$.

$\frac{dy}{y} = k \cdot dt$. Integriamo membro a membro:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k \cdot dt \;, \quad ln|y| = kt + c \;, \quad |y| = e^{kt+c} \;, \quad |y| = e^c \cdot e^{kt} \;, \quad y = \pm e^c \cdot e^{kt}$$

Ponendo $\pm e^c = h$, con h costante positiva o negativa, si ha:

$y = h \cdot e^{kt}$: popolazione dei batteri al tempo t.

In base alle due condizioni relative al tempo t=0 e t=3 si ha:

$$\begin{cases} 4000 = h \cdot e^0 = h \\ 6500 = h \cdot e^{3k} = 4000 \cdot e^{3k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4000 \\ e^{3k} = \frac{65}{40}, \quad 3k = ln\left(\frac{65}{40}\right) \;, \quad k = \frac{1}{3} ln\left(\frac{13}{8}\right) = ln\sqrt[3]{\frac{13}{8}} \end{cases}$$

Quindi:

$$y = 4000 \cdot e^{ln\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\,t} = 4000 \cdot \left(e^{ln\sqrt[3]{\frac{13}{8}}}\right)^t = 4000 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\right)^t$$

Controlliamo se per t=10 la popolazione supererà i 20000 batteri, cioè se per t=10 risulta y>20000.

$$4000 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\right)^{10} = 4000 \cdot \left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{10}{3}} \cong 4000 \cdot 5.0448 \cong 20179 > 20000$$

Quindi al tempo $t = 10$, la popolazione è pari a circa 20179 batteri, supererà pertanto i 20000 batteri.

QUESITO 7

Una particella si muove lungo una certa curva secondo le seguenti leggi:

$$x(t) = 3\; - 2 \cdot cos(t), \qquad y(t) = 2 + 3 \cdot sen(t).$$

Disegnare la traiettoria percorsa dalla particella per t che va da 0 a 2π secondi e determinare la velocità di variazione di θ, l'angolo formato dalla tangente alla traiettoria con l'asse x, per t $= \frac{2}{3}\pi$ secondi.

La traiettoria ha le seguenti equazioni parametriche:

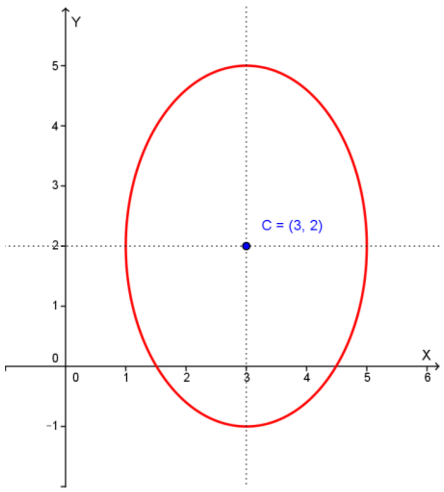
$\begin{cases} x = 3\; - 2 \cdot cos(t) \\ y = 2 + 3 \cdot sen(t) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \cos(t) = \frac{3-x}{2} \\ sen(t) = \frac{y-2}{3} \end{cases}$ e tenendo presente che $sen^2(t) + \cos^2(t) = 1$

abbiamo l'equazione della traiettoria:

$$\left(\frac{y-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

che è un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani, centro in $(3; 2)$ e semiassi $a = 2,\;\; b = 3$: quindi i fuochi sono sull'asse parallelo all'asse y (retta x=3) ed in particolare la semidistanza focale c è pari a: $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$; l'eccentricità dell'ellisse è data da: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{9}$.

Il grafico della traiettoria è il seguente (percorsa in senso orario poiché se t=0 la particella si trova ne punto (1;2) e se $t = \pi/2$ si trova nel punto (3;5).



Ricordiamo che l'angolo θ che la tangente alla traiettoria forma con l'asse x è tale che:

$$tg(\theta) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3 \cdot cos(t)}{2 \cdot sen(t)} = \frac{3}{2 \cdot tg(t)} \quad \Longrightarrow \quad \theta = arctg\left(\frac{3}{2 \cdot tg(t)}\right)$$

La velocità di variazione di θ è data da:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2 \cdot tg(t)}\right)}{1 + \left(\frac{3}{2 \cdot tg(t)}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{d}{dt}(cotg(t))}{1 + \left(\frac{3}{2 \cdot tg(t)}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{sen^2(t)}\right)}{1 + \left(\frac{3}{2 \cdot tg(t)}\right)^2}$$

Per $t = \frac{2}{3}\pi$ risulta: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)}{1+\left(\frac{3}{-2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2} = \frac{-2}{1+\frac{3}{4}} = -\frac{8}{7}\ rad/s \cong -1.14\ rad/s$

QUESITO 8

Se $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+\ln(t)}\, dt \quad per \quad x \geq 1$, *qual è il valore di* $f'(2)$ *?*

Ricordiamo che, posto

$F(x) = \int_{x_0}^{g(x)} f(t)\, dt$ risulta: $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$; nel nostro caso si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \ln(x^3)} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{1 + 3\ln(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(2) = \frac{12}{1 + 3ln2}$$

QUESITO 9

Risolvere il seguente problema posto nel 1547 da Ludovico Ferrari a Niccolò Tartaglia: "Si divida il numero 8 in 2 numeri reali non negativi in modo che sia massimo il prodotto di uno per l'altro e per la loro differenza".

Consideriamo il segmento AB di lunghezza 8 e dividiamolo in due parti (di cui una può anche essere nulla) AC e BC, di lunghezza rispettivamente x e 8-x (supponiamo, come è lecito, che AC sia non superiore a BC).

Dobbiamo determinare x in modo che sia massima la seguente espressione:

$y = x(8-x)(8-x-x) = x(8-x)(8-2x)\,, \quad con \quad 0 \le x \le 4$

Calcoliamo la derivata della funzione:

$y' = (8-x)(8-2x) + x(-1)(8-2x) + x(8-x)(-2) = 6x^2 - 48x + 64 \ge 0 \quad se$

$x \le -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \cong 1.7 \quad or \quad x \ge \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \cong 6.3$

Tenendo conto delle nostre limitazioni sulla x:

$$y' \ge 0 \quad se \quad 0 \le x \le -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \cong 1.7$$

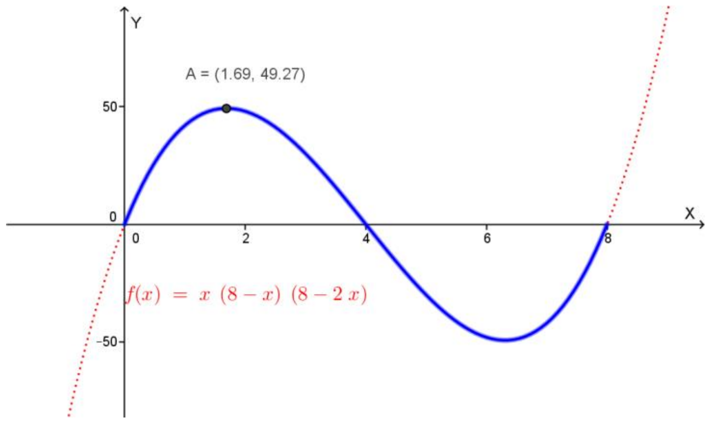
La funzione è quindi crescente se $0 \le x < -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \cong 1.7$ e decrescente se $-\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 < x < 4$; pertanto ammette un massimo relativo (e assoluto) se:

$$x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 \cong 1.7$$

Le due parti in cui occorre dividere il numero 8 affinché sia risolto il problema sono:

$$AC = x = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cong 1.7 \quad e \quad BC = 8 - x = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \cong 6.3$$

La funzione analizzata ha il seguente grafico:



QUESITO 10

Trovare l'equazione della retta perpendicolare al grafico di $f(x) = 4x^3 - 7x^2$ *nel punto di ascissa 3.*

Il punto P di ascissa 3 ha ordinata $f(3) = 45$: $P = (3; 45)$.
Il coefficiente angolare m della retta perpendicolare in P al grafico della funzione è:

$$m = -\frac{1}{f'(3)}$$

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = 12x^2 - 14x\ , \quad f'(3) = 66 \quad , \quad m = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{66}$$

La retta richiesta ha quindi equazione:

$$y - 45 = -\frac{1}{66}(x - 3), \qquad x + 66y - 2973 = 0$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria