

**Indirizzi:** LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA  
EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

### QUESITO 1

Determiniamo  $y = f(x)$  sapendo che il suo grafico è tangente alla retta  $y = -2x + 5$  nel secondo quadrante e che risulta:  $f'(x) = -2x^2 + 6$ .

Si ha:

$$f(x) = \int(-2x^2 + 6) dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + k \quad (*)$$

Inoltre deve essere  $f'(x) = -2$  con  $x < 0$ ; quindi:

$$-2x^2 + 6 = -2 \quad \text{se} \quad x = \pm 2, \quad \text{per noi} \quad x = -2$$

Per  $x = -2$  dall'equazione della retta troviamo  $y = 4 + 5 = 9$ . Quindi la funzione passa per il punto di coordinate  $(-2; 9)$ . Imponiamo il passaggio per tale punto alla curva di equazione (\*).

$$9 = \frac{16}{3} - 12 + k \quad \text{da cui} \quad k = \frac{47}{3}.$$

La funzione richiesta ha quindi equazione:  $y = f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$

### QUESITO 2

Risolvere l'equazione  $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$ .

Dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$n + 1 \geq 5 \Rightarrow n \geq 4 \quad \text{e} \quad n - 1 \geq 4 \Rightarrow n \geq 5 : \quad \text{quindi } n \geq 5 \text{ ed } n \text{ intero}$$

Sviluppando i coefficienti binomiali e ricordando che  $n! = (n - 1)!n$ , si ha:

$$5 \cdot \frac{(n+1)!}{5!(n-4)!} = 21 \cdot \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} \Rightarrow \frac{(n-1)!(n)(n+1)}{4!(n-5)!(n-4)} = 21 \cdot \frac{(n-1)!}{4! \cdot (n-5)!}$$

Semplificando otteniamo:

$$\frac{n(n+1)}{n-4} = 21, \quad n^2 + n = 21n - 84, \quad n^2 - 20n + 84 = 0 : \quad n = 6, \quad n = 14$$

Entrambe le soluzioni soddisfano le condizioni su  $n$ .

### QUESITO 3

Calcolare:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2})$ .

La Il limite si presenta nella forma indeterminata  $[+\infty - \infty]$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}) \cdot (\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5 - (3x-2)}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})} = 0^+ \end{aligned}$$

### QUESITO 4

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$$

Si chiede di trovare il minimo della funzione (definita per tutti gli  $x$  reali).

Calcoliamo la derivata prima:

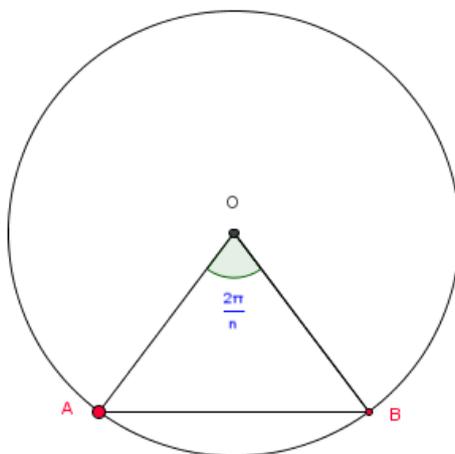
$$f'(x) = 10x - 30 \geq 0 \quad \text{se } x \geq 3 \quad \text{quindi:}$$

il grafico della funzione è crescente se  $x > 3$  e decrescente se  $x < 3$ ; pertanto:

il minimo assoluto della funzione si ha per  $x=3$  ed è  $f(3) = 10$ .

### QUESITO 5

Indicando con  $O$  il centro della circonferenza e con  $AB$  il lato del poligono regolare inscritto di  $n$  lati, l'area  $A(n) = S_n$  del poligono si ottiene moltiplicando per  $n$  l'area del triangolo  $AOB$ .



Essendo  $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}$  e ricordando che l'area di un triangolo si può calcolare come semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, si ha:

$$S_n = n \cdot \text{Area}(\text{AOB}) = n \cdot \left( \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right) = \frac{n}{2} r^2 \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right), \text{ come richiesto.}$$

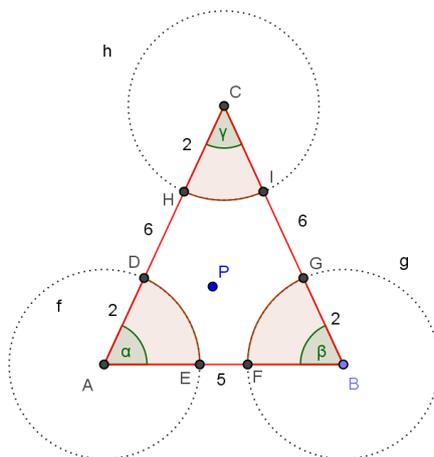
Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} r^2 \text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} r^2 \frac{2\pi}{n} \left( \frac{\text{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2\pi}{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} r^2 \frac{2\pi}{n} \cdot 1 = \pi r^2 \end{aligned}$$

Come è noto, il limite ottenuto non è altro che l'area del cerchio.

## QUESITO 6

*I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?*



La probabilità richiesta è data dal rapporto tra “l’area favorevole” e “l’area possibile”.

Area favorevole = area triangolo – area dei tre settori circolari di centri A, B e C con raggi 2 e ampiezze pari agli angoli interni del triangolo;

la somma dei tre settori equivale ad un settore circolare di ampiezza  $180^\circ$  (la somma dei tre angoli) e raggio 2, quindi ad un semicerchio di raggio 2:  $\frac{\pi}{2} \cdot r^2 = 2\pi$ .

Per calcolare l'area del triangolo ABC, isoscele sulla base AB, troviamo l'altezza h relativa a tale base:

$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{119}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{119}$$

Quindi:

$$\text{Area}(ABC) = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{119}}{2} = \frac{5}{4}\sqrt{119}$$

$$\text{Area}(favorevole) = \text{area}(ABC) - \text{area dei tre settori circolari} = \frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi$$

Infine:

$$p = \frac{\text{Area}(favorevole)}{\text{Area}(possibile)} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}} \cong 0.539 \cong 54\%$$

## QUESITO 7

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

*Dobbiamo determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0, 2] sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.*

Determiniamo k in modo che la funzione sia continua in x=1: si verifica facilmente che la funzione è continua per ogni k, poiché il limite destro, il limite sinistro ed il valore che la funzione assume in 1 sono uguali (esattamente ad 1).

Dobbiamo imporre che la funzione sia derivabile in x=1. Risulta:

$$\begin{aligned} \text{in } 0 \leq x < 1: & f'(x) = 3x^2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \\ \text{in } 1 < x \leq 2: & f'(x) = 2x - k \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - k) = 2 - k \end{aligned}$$

$$\text{Dovrà essere: } 2 - k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Per tale valore di k la funzione è continua nell'intervallo chiuso  $[0;2]$  e derivabile nell'aperto  $(0;2)$ : quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Pertanto esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) = \frac{5 - 0}{2} = \frac{5}{2}$$

Osserviamo che se  $x=1$  la derivata della funzione vale 3, quindi c non può essere 1; se x è diverso da 1 otteniamo:

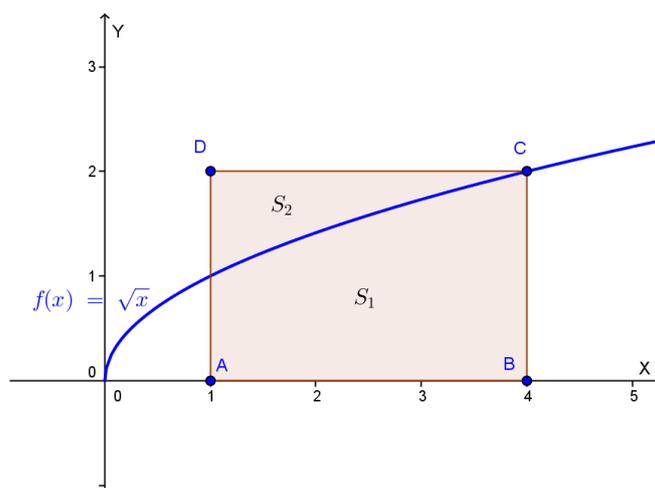
$$\text{Se } 0 \leq x < 1: \quad 3x^2 = \frac{5}{2}, \quad x^2 = \frac{5}{6} \quad x = \pm \sqrt{\frac{5}{6}} \quad \text{quindi } c = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\text{Se } 1 < x \leq 2: \quad 2x + 1 = \frac{5}{2}, \quad 2x = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{3}{4} \quad \text{non accettabile}$$

Il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza è  $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$ .

### QUESITO 8

Rappresentiamo graficamente la funzione ed il rettangolo:



$$A(\text{rettangolo}) = 3 \cdot 2 \, u^2 = 6 \, u^2$$

$$S_1 = \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[ \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \, u^2$$

$$S_2 = 6 \, u^2 - \frac{14}{3} \, u^2 = \frac{4}{3} \, u^2 \quad . \quad \text{Quindi: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria