SIMULAZIONE - 22 APRILE 2015 - PROBLEMA 1:CURVA NORD

Sei il responsabile della gestione del settore "Curva Nord" dell'impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all'ingresso e all'uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e all'assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.

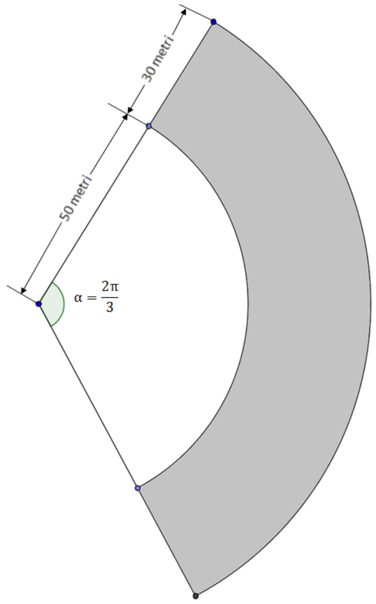


figura 1

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento massimo di 3,25 persone/m^2, e che il 9,5% della superficie della "Curva Nord" è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione,

1) *Determina la capienza massima N_{max} attuale del settore "Curva Nord", approssimata alle centinaia.*

Determiniamo l'area effettiva della "curva", sottraendo al settore circolare S_1 di raggio 80 metri e ampiezza $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, il settore S_2 di raggio 50 metri e uguale ampiezza

Ricordiamo che l'area di un settore circolare di raggio R ed arco di lunghezza l è uguale a:

$$A(settore\ circolare) = \frac{l \cdot R}{2}$$

Se l'ampiezza del settore circolare è uguale ad α radianti, essendo $\alpha = \frac{l}{R}$ risulta $l = \alpha \cdot R$

Quindi:

$$A(settore\ circolare) = \frac{l \cdot R}{2} = \frac{1}{2}\ \alpha \cdot R^2$$

$$A(curva) = S_1 - S_2 = \frac{1}{2} l_1 R_1 - \frac{1}{2} l_2 R_2 = \frac{1}{2}(\alpha R_1) R_1 - \frac{1}{2}(\alpha R_2) R_2 = \frac{1}{2}\alpha(R_1^2 - R_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi\right)(80^2 - 50^2)\ m^2 = \frac{\pi}{3} \cdot 3900\ m^2 = 1300\,\pi\ \ m^2\ \ \cong 4084.07\ \ m^2$$

La parte inagibile, pari al 9.5% della superficie della curva è pari a:

$$A(curva\ inagibile) = \frac{9.5}{100} \cdot 1300\,\pi\ \ m^2 \cong\ 387.99\ m^2$$

$$A(curva\ agibile) = \left(1300\,\pi\ \ - \frac{247\pi}{2}\right)\ m^2 = \frac{2353\pi}{2}\ m^2 \cong\ 3696.08\, m^2$$

Essendo l'indice di affollamento massimo di 3.25 persone/m^2 , la capienza massima $\mathrm{N_{max}}$ attuale del settore "Curva Nord", approssimata alle centinaia è data da:

$$\mathrm{N_{max}} = (3.25\, persone/m^2) \cdot (3696.08\, m^2) = 12012.26\ \ persone\ \ \cong 12000\, persone$$

La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un'ora prima dell'inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo, per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l'andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un'ora prima dell'inizio della manifestazione, segue una curva come quella riportata in figura 2:

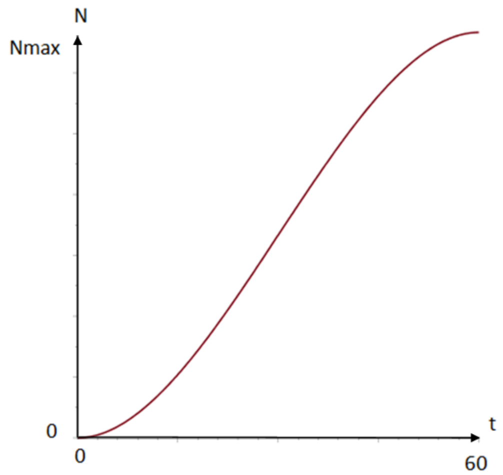


figura 2

2) *Esprimendo il tempo t in minuti, determina il polinomio p(t) di terzo grado che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso (t =0) e sia pari al numero massimo consentito N_{max} dopo un'ora (t =60), e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi, e sia ancora 0 dopo un'ora, quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.*

$N = p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (t in minuti)

Se t=0, p=0, quindi: $d = 0$

Se t=60, $p = N_{max} = 12000$ quindi: $12000 = 216000a + 3600b + 60c$ da cui:

$200 = 3600a + 60b + c$

La velocità di accesso è data dalla derivata prima di p(t):

$v(t) = p'(t) = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3at^2 + 2bt + c$

Deve essere:

$v(0) = 0 \quad da\ cui \quad c = 0$ e

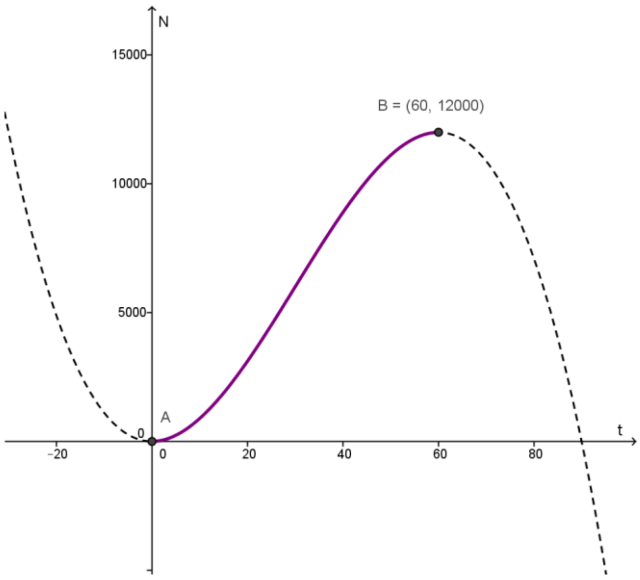
$v(60) = 0 \quad da\ cui \quad 10800a + 120b = 0 \quad che\ equivale\ a \quad 90\,a + b = 0$

Quindi, per trovare a e b:

$\begin{cases} 200 = 3600a + 60b + c \\ 90\,a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 200 = 3600a - 5400a \\ b = -90a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = 10 \end{cases}$

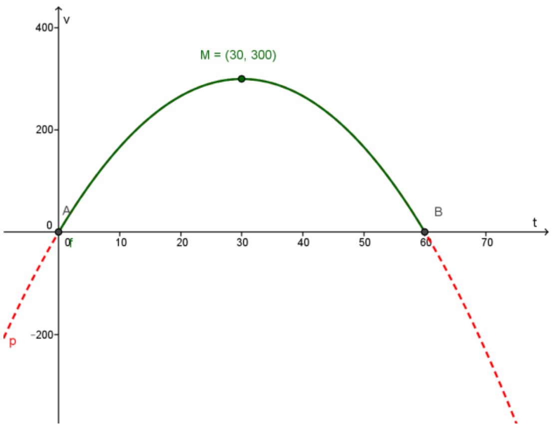
Quindi:

$N = p(t) = -\frac{1}{9}t^3 + 10t^2$



La velocità di accesso è quindi: $v = v(t) = p'(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 20t$

Tale funzione ha per grafico la seguente parabola:



Il massimo della velocità (ottenuto in corrispondenza di t=30) è pari a 300, che è inferiore al massimo consentito pari a 350 ingressi al minuto.

Quindi è verificato il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

3) *Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con t=0 l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo [0; t_c]; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.*

Se t=0 (istante in cui si aprono i cancelli al termine della manifestazione) risulta N=12000; se t=1 si ha $N = \frac{95}{100} \cdot 12000 = 11400$; all'istante generico t il numero N degli spettatori presenti nell'impianto è dato da:

$N = N(t) = 0.95 \cdot N(t-1)$ da cui:

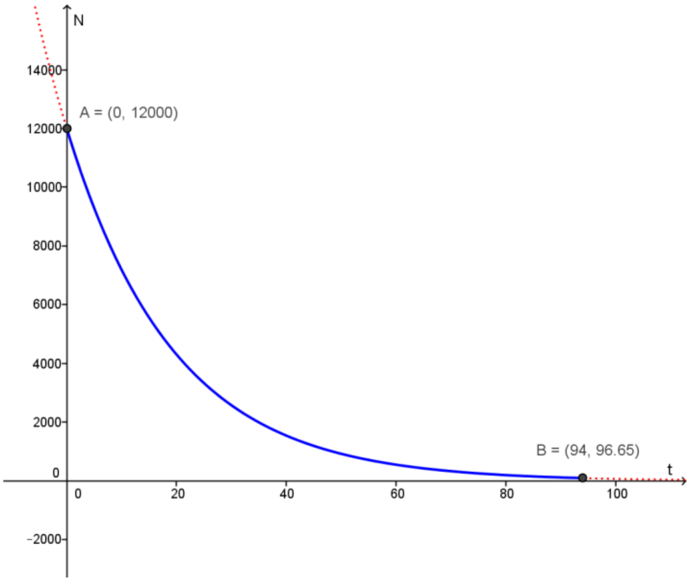
$\frac{N(t)}{N(t-1)} = 0.95$, quindi N(t) è il termine generico di una progressione geometrica di ragione q=0.95 e primo termine $N(0) = 12000$. Pertanto:

$N(t) = N(0) \cdot 0.95^t = 12000 \cdot 0.95^t$.

Risulta $N(t) = 12000 \cdot 0.95^t < 100$ se $0.95^t < \frac{1}{120}$ $\quad da\ cui \quad t \cdot \ln(0.95) < \ln\left(\frac{1}{120}\right)$

Quindi: $t > \frac{\ln\left(\frac{1}{120}\right)}{\ln(0.95)} \cong 93.3$ per cui $t_c \cong 94\ minuti$, cioè dopo 94 minuti dall'apertura dei cancelli di uscita nell'impianto rimangono meno di 100 spettatori.

La funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori è:
$N(t) = 12000 \cdot 0.95^t$ che ha il seguente grafico:



Determiniamo la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

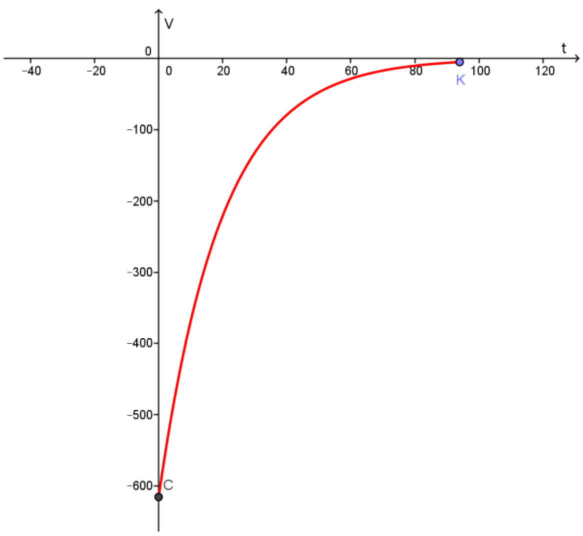
$N(t) = 12000 \cdot 0.95^t$

$velocità\ di\ deflusso = v(t) = \frac{dN}{dt} = 12000 \cdot \ln(0.95) \cdot 0.95^t$

Il massimo di questa funzione, in valore assoluto, si ottiene per t=0 e vale:

$v_{max} = |12000 \cdot \ln(0.95)| \cong 616\ spettatori/minuto$

Quindi la massima velocità di deflusso è di circa 616 spettatori al minuto, ottenuta all'inizio del deflusso (t=0 minuti).



Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di presenze nell'impianto

4) *Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante t = 0 (apertura dei cancelli) all'istante t = t_c.*

Dobbiamo distinguere 3 fasi

Prima fase: fase d'ingresso, che dura un'ora.
In questa fase il numero di spettatori presenti è rappresentato dalla funzione trovata nel punto 2, cioè:

$N(t) = -\frac{1}{9}t^3 + 10t^2$, per $0 \leq t \leq 60$ (t è espresso in minuti)

Seconda fase: svolgimento della manifestazione sportiva, che dura un'ora.
In questa fase il numero degli spettatori è costante e pari a 12000:

$N(t) = 12000$, per $60 \leq t \leq 120$ (t è espresso in minuti)

Terza fase: fase di deflusso, fino all'istante t_C , quando nell'impianto rimangono meno di 100 spettatori; tale fase, come visto, dura circa 94 minuti. La funzione rappresentativa è:

$N(t) = 12000 \cdot 0.95^{t-120}$, per $120 \leq t \leq 214$ (t è espresso in minuti)

Il numero medio di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $0 \leq t \leq 214$ si ottiene attraverso il teorema della media. Quindi:

$$N_{medio} = \frac{1}{214-0} \cdot \int_0^{214} N(t)dt =$$

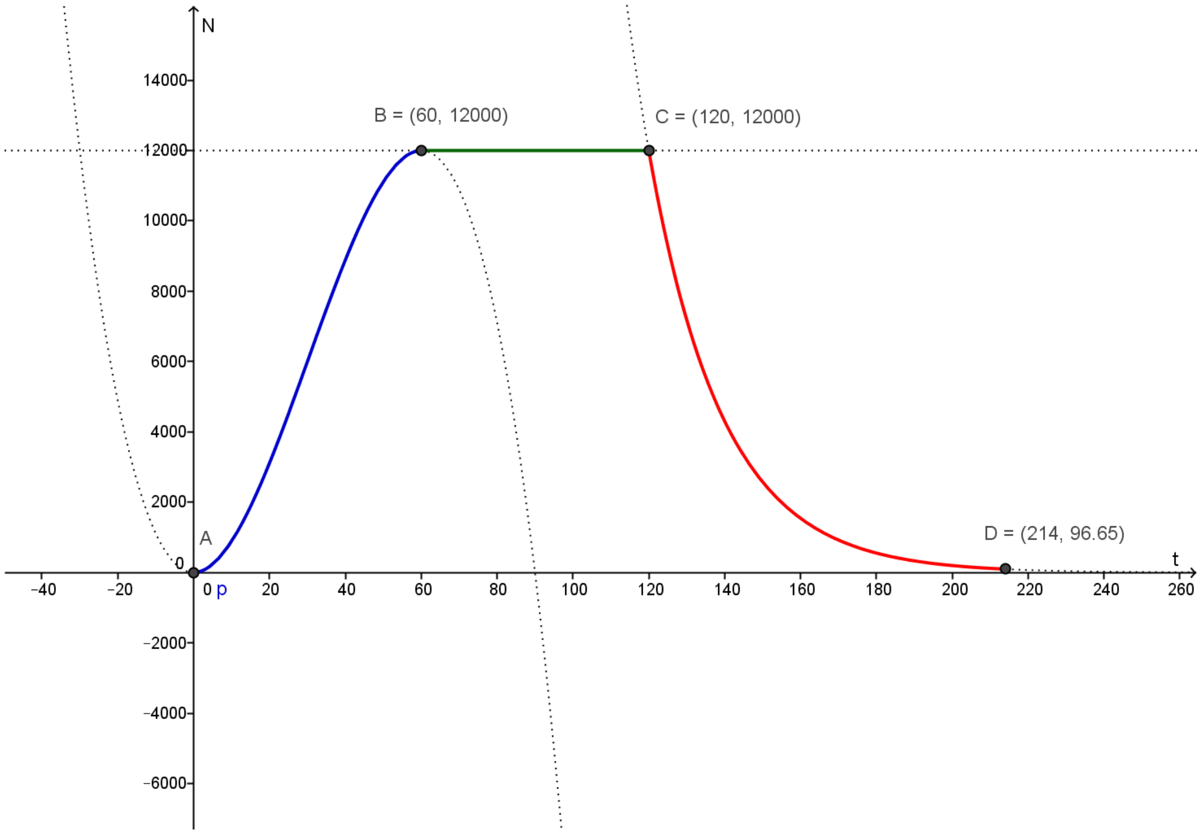
$$= \frac{1}{214} \cdot \left[\int_0^{60} \left(-\frac{1}{9}t^3 + 10t^2 \right) dt + \int_{60}^{120} 12000\, dt + \int_{120}^{214} 12000 \cdot 0.95^{t-120}\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{214} \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{36}t^4 + \frac{10}{3}t^3 \right]_0^{60} + [12000\, t]_{60}^{120} + \left[\frac{12000}{0.95^{120}} \cdot \frac{0.95^t}{\ln(0.95)} \right]_{120}^{214} \right\} =$$

$$= \frac{1}{214} \{360000 + 720000 + 232064\} \cong 6131$$

Il numero medio spettatori presenti nell'impianto dall'inizio dell'ingresso fino al minuto 214, quando nell'impianto ci sono meno di 100 persone, è circa 6131.

Rappresentiamo graficamente la funzione nelle tre fasi:



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri