# SIMULAZIONE - 22 APRILE 2015 - PROBLEMA 2: IL VASO

*L'azienda in cui lavori produce articoli da giardino e sei stato incaricato di rivedere il disegno di un vaso portafiori realizzato da un tuo collega. Il vaso, di altezza h = 18 cm, è composto da due tronchi di cono aventi la base maggiore in comune e il disegno che ti è stato fornito (figura 1) ne rappresenta la sezione longitudinale:*

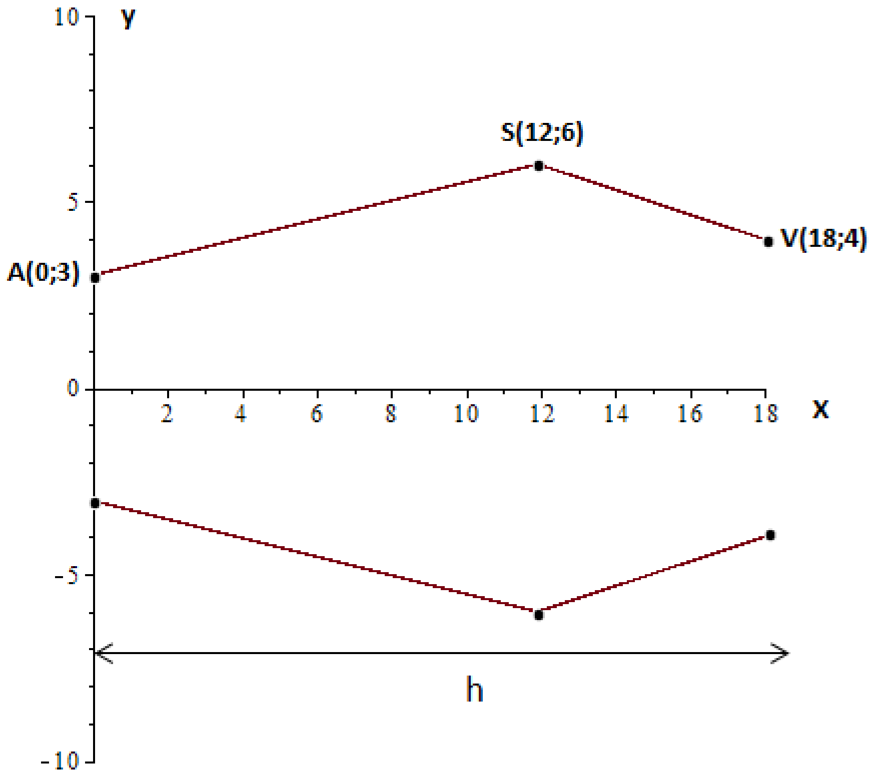



figura 1

*Nel riferimento cartesiano utilizzato in figura 1 l'unità corrisponde a 1 cm. Il direttore del tuo reparto ti chiede di:*

**1)** *verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.*

Calcoliamo il volume del vaso, ricordando che il volume di un tronco di cono è dato da

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot h$$

$$V(vaso) = \frac{1}{3}\pi \cdot (3^2 + 6^2 + 3 \cdot 6) \cdot 12 + \frac{1}{3}\pi \cdot (4^2 + 6^2 + 4 \cdot 6) \cdot 6 = 404\,\pi\ cm^3 \cong 1269\ cm^3$$

$$V(vaso) \cong 1269\ cm^3 = 1.269\ dm^3 = 1.269\ litri < 1.5\ litri$$

*Se il volume risulta minore di 1,5 litri, bisogna rendere il vaso più alto, fino a fargli raggiungere il volume di 1,5 litri, lasciando però invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A, S e V, rendendo inoltre la forma meno spigolosa. Per chiarire meglio la sua richiesta, il direttore ti dà un suo disegno, modificato rispetto al precedente (figura 2).*

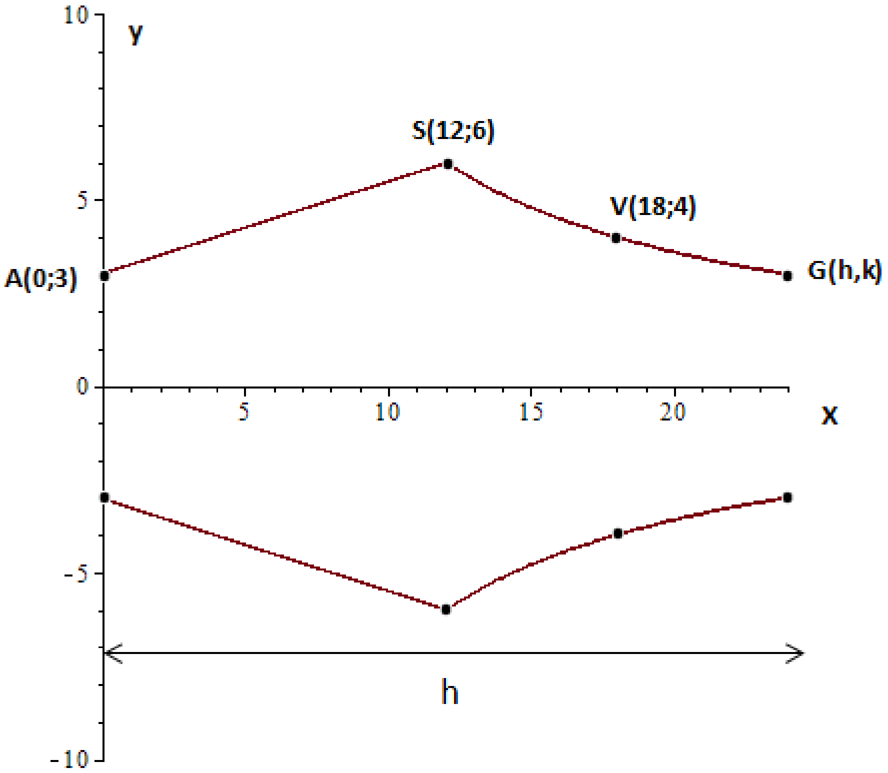



figura 2

*La curva passante per i punti S, V e G, disegnata dal direttore, può essere approssimata con un'iperbole di equazione y=a/x.*

**2)** *Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori delle coordinate h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.*

Il primo tronco ha volume $\frac{1}{3}\pi \cdot (3^2 + 6^2 + 3 \cdot 6) \cdot 12 = 252\,\pi \cong 792\ cm^3$ , quindi la parte di vaso da modificare deve avere volume pari a: $1500\ cm^3 - 792\ cm^3 = 708\ cm^3$

Il volume della parte di vaso da modificare si ottiene facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse x l'arco di iperbole di equazione *y=a/x* nell'intervallo $12 \le x \le h$ :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_{12}^{h} \frac{a^2}{x^2}dx = -\pi a^2 \left[\frac{1}{x}\right]_{12}^{h} = -\pi a^2 \cdot \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{12}\right] = \pi a^2 \cdot \frac{h-12}{12h} = 708$$

Siccome l'iperbole deve passare per il punto di coordinate $(18; 4)$, deve essere:

$4 = \frac{a}{18} \quad \Longrightarrow \quad a = 72$ . Da $\pi a^2 \cdot \frac{h-12}{12h} = 708$ si ottiene:

$$\pi \cdot 72^2 \cdot \frac{h-12}{12h} = 708 \quad \Longrightarrow \quad 1357.168\left(\frac{h-12}{h}\right) = 708 \quad \Longrightarrow h - 12 = \frac{h \cdot 708}{1357.168}$$

$$h - 12 = 0.522\,h \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{12}{0.478} \cong 25.1\ cm$$

Imponendo il passaggio per il punto (h,k) all'iperbole di equazione $y = \frac{72}{x}$ si ha:
$k = \frac{72}{25.1} = 2.9\ cm$ . Quindi il punto G ha coordinate $G = (25.1; 2.9)$ .

*Dopo che un primo esemplare del vaso è stato prodotto, il responsabile della produzione fa rilevare che l'eccessiva spigolosità del profilo del vaso nel punto S ne rende costosa la produzione.*

**3)** *Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano y≥0; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;*

In S=(12;6) la funzione è continua ma non è derivabile, in particolare S è un punto angoloso. Infatti:
la retta AS ha coefficiente angolare $m = \frac{6-3}{12-0} = \frac{1}{4}$ quindi:

$$y'_-(12) = \frac{1}{4}$$

La derivata della funzione di equazione $y = \frac{72}{x}$ è $y' = -\frac{72}{x^2}$ pertanto:

$$y'_+(12) = -\frac{72}{144} = -\frac{1}{2}$$

La derivata sinistra e la derivata destra in S esistono ma sono diverse, quindi S è un punto angoloso. Le due semitangenti (destra e sinistra) in S formano un angolo tale che:

$$tg\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{8}}\right| = \frac{6}{7} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{6}{7}\right) \cong 40°36'$$

**4)** *lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A e S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiungere i punti A e S, eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.*

La funzione richiesta è del tipo $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ .
Passaggio per A=(0;3): $3 = c$ .
Passaggio per S=(12;6): $6 = 144a + 12b + 3$
Affinché in S scompaia la non derivabilità deve essere $f'_-(12) = -\frac{1}{2}$ , quindi:

$(2ax + b)_{x=12} = 24a + b = -\frac{1}{2}$ , pertanto:

$$\begin{cases} 6 = 144a + 12b + 3 \\ 24a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 48a + 4b = 1 \\ 48a + 2b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

La funzione richiesta ha quindi equazione:

$$y = f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x + 3$$

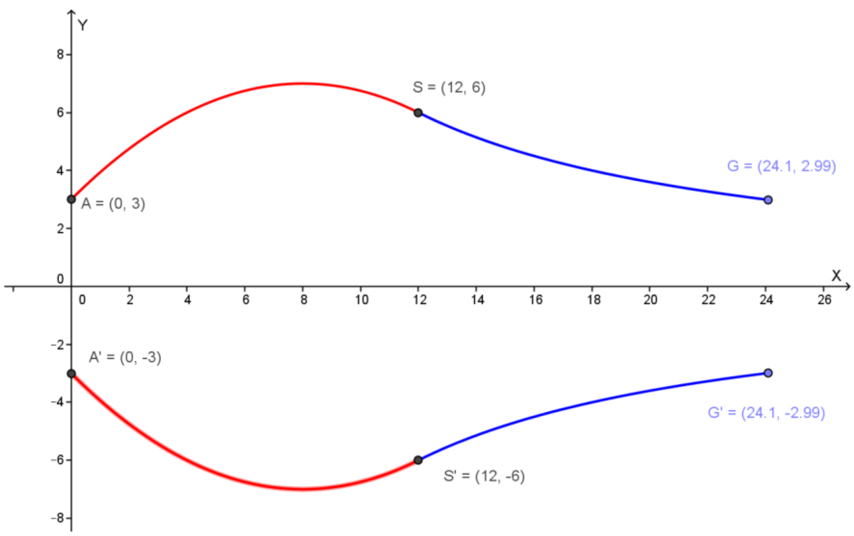
L'equazione della funzione che rappresenta la nuova sagoma del vaso (per $y \geq 0$) è quindi:

$$y = g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{16}x^2 + x + 3 & se \quad 0 \leq x \leq 12 \\ \dfrac{72}{x} & se \quad 12 < x \leq 25.1 \end{cases}$$

Se $0 \leq x \leq 12$ abbiamo una parabola con la concavità verso il basso e vertice di coordinate:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 8 \qquad e \qquad y_V = g(8) = 7$$

La nuova sagoma del vaso è quindi rappresentata dal grafico della g e dal suo simmetrico rispetto all'asse x:




Dobbiamo ora individuare il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

Ciò equivale a trovare il punto della parabola in cui la tangente è parallela alla retta AS, cioè il punto della curva di equazione

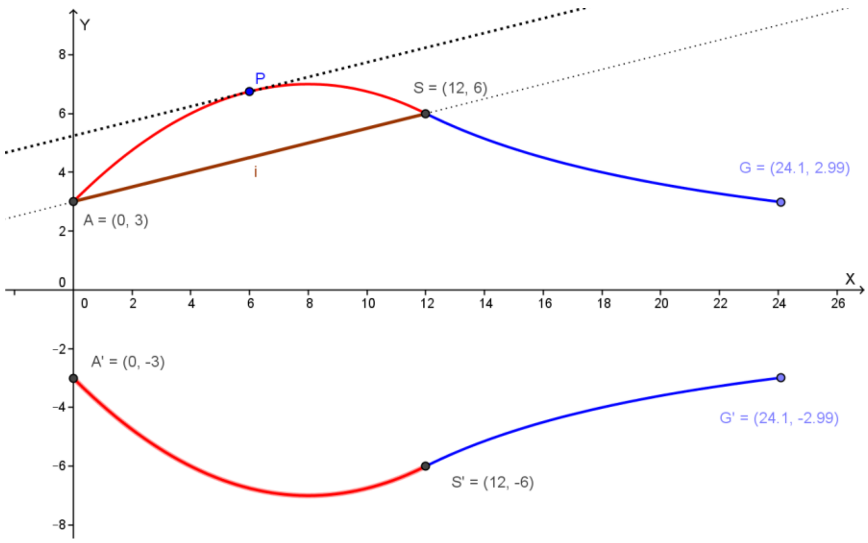
$$y = f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x + 3$$

con derivata pari al coefficiente angolare della retta AS, che, come già visto nel punto 3, è uguale a 1/4 . Quindi:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}x + 1 = \frac{1}{4} \quad se \quad x = 6 \quad , \quad da\ cui \quad y = f(6) = \frac{27}{4} = 6.75$$

Il punto P richiesto ha quindi coordinate $P = \left(6; \frac{27}{4}\right)$.

Notiamo che il punto P è quello che soddisfa il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + x + 3$ nell'intervallo $[0; 12]$.




Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri