SIMULAZIONE - 22 APRILE 2015 - QUESITI

Q1

Assegnata *la funzione*

$y = f(x) = e^{x^3-8}$

1) verificare che è invertibile;
2) stabilire se la funzione inversa f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione, giustificando la risposta.

1) La funzione è definita, continua e derivabile su tutto l'asse reale. Risulta:
$f'(x) = (3x^2)e^{x^3-8} \geq 0$ per ogni x, quindi la funzione è sempre crescente in senso stretto, quindi è invertibile (cioè realizza una corrispondenza biunivoca tra dominio e codominio).

2) Posto $x = f^{-1}(y)$, risulta $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$ e siccome $y'(x) = 0 \quad se\ x = 0$, f^{-1} non è derivabile in corrispondenza di x=0, cioè in $y = f(0) = e^{-8}$.
Notiamo che il dominio della f^{-1} è il codominio della f, che è y>0. Anche se non richiesto, determiniamo l'espressione analitica della funzione inversa.

Da $y = f(x) = e^{x^3-8}$ ricaviamo: $x^3 - 8 = \ln(y)$, $da\ cui \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{8 + \ln(y)}$.

Q2

Data l'equazione differenziale del primo ordine

$y' = \frac{1}{2x-1}$

determinare la soluzione del problema di Cauchy, tenendo conto della condizione iniziale y(1)= 0.

Da $y' = \frac{1}{2x-1}$ ricaviamo:

$y = \int \frac{1}{2x-1}\, dx = \frac{1}{2} ln|2x-1| + k$ e dovendo essere $y(1) = 0$ otteniamo: $0 = k$.

La soluzione richiesta, definita in un intorno di x=1, quindi dove 2x-1>0, è :

$$y = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$$

Q3

Di quale delle seguenti equazioni differenziali è soluzione la funzione $y = \ln(x-3)$?

a) $(x-3)\cdot y'' - (x-3)^2 \cdot y' + 2 = 0$
b) $x \cdot y'' - (x-3)\cdot y' + x + 2 = 0$
c) $(x-3)^2 \cdot y'' - (x-3)\cdot y' + 2 = 0$
d) $x^2 \cdot y'' + y' + 3x - 9 = 0$

Giustificare la risposta.

Notiamo che la funzione è continua per x>3, ed ammette derivata prima e derivata seconda, che sono:

$$y' = \frac{1}{x-3} \qquad y'' = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

a) $(x-3)\cdot y'' - (x-3)^2 \cdot y' + 2 = -\frac{1}{x-3} - (x-3) + 2 \neq 0$

b) $x \cdot y'' - (x-3)\cdot y' + x + 2 = -\frac{x}{(x-3)^2} - 1 + x + 2 \neq 0$

c) $(x-3)^2 \cdot y'' - (x-3)\cdot y' + 2 = -1 - 1 + 2 = 0 \;\; : \quad verificata$

d) $x^2 \cdot y'' + y' + 3x - 9 = \frac{-x^2}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3} + 3x - 9 \neq 0$

La soluzione è quindi la c).

Q4

Verificare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$$

e, nel caso in cui sia convergente, determinare la sua somma.

Notiamo che il termine generale $a_n = \frac{1}{n^2+7n+12}$ è asintotico a $\frac{1}{n^2}$, quindi la serie è convergente.

Si tratta di una "serie telescopica", la cui somma si ottiene procedendo nel modo seguente:

Poiché $n^2 + 7n + 12 = (n+3)(n+4)$, risulta:

$$\frac{1}{n^2+7n+12} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+4} = \frac{a(n+4)+b(n+3)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n(a+b)+4a+3b}{(n+3)(n+4)}$$

Da cui, dato che l'uguaglianza deve essere verificata per ogni valore accettabile di n:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+3b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-a \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$a_n = \frac{1}{n^2+7n+12} = \frac{a}{n+3} + \frac{b}{n+4} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$$

La successione delle somme parziali è quindi:

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}$$

Risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{3}$$

Quindi la serie è convergente ed ha per somma $\frac{1}{3}$.

Q5

Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.

La scelta delle due lettere (tra le 26 possibili) è data dalle disposizioni con ripetizioni di 26 oggetti a due a due:

$$D^r_{26,2} = 26^2 = 676$$

La scelta di n cifre $(1 \le n \le 10)$ è data dalle disposizioni con ripetizioni di 10 oggetti ad n ad n:

$$D^r_{10,n} = 10^n$$

Il numero di codici unici possibile è dato da:

$$D^r_{26,2} \cdot D^r_{10,n} = 676 \cdot 10^n$$

Si vuole che i codici siano almeno 5 milioni, quindi deve essere:

$$676 \cdot 10^n \ge 5 \cdot 10^6 \quad n \ge \log_{10}\frac{5\cdot 10^6}{676} = \log_{10}5 + 6 - \log_{10}676 \cong 3.87 \ .$$

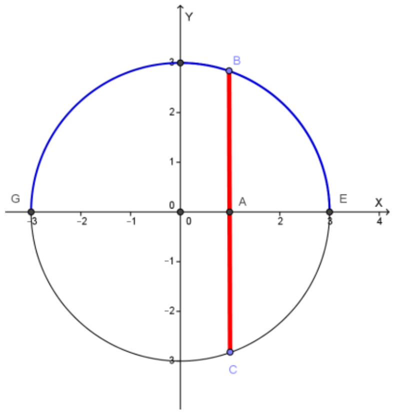
Quindi n deve essere almeno 4: i codici devono essere formati da almeno 6 caratteri (2 lettere seguite da almeno 4 cifre).

Q6

La base di un solido, nel piano Oxy, è il cerchio avente come centro l'origine e raggio 3. Le sezioni del solido perpendicolari all'asse delle x sono quadrati.
Calcolare il volume del solido.

La circonferenza di centro O e raggio 3 ha equazione:

$x^2 + y^2 = 9$, da cui $y^2 = 9 - x^2$



La sezione quadrata ha lato 2y, essendo y l'ordinata de generico punto della circonferenza del semipiano $y \geq 0$. Il quadrato ha quindi area:

$$A = (2y)^2 = 4y^2 = 4(9 - x^2) = A(x)$$

Il volume del solido è dato da:

$$V = \int_a^b A(x)dx = 2\int_0^3 A(x)dx = 2\int_0^3 4(9 - x^2)\, dx = 8\int_0^3 (9 - x^2)\, dx = 8\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= 8(27 - 9) = 144\ u^3 = V$$

Q7

Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate (1,1,z), con z negativa.

La sfera ha equazione: $x^2 + y^2 + z^2 = 4;$ ponendo x=1 e y=1 otteniamo $z = \pm\sqrt{2}$

Il punto di tangenza è quindi: $T = (1,1,-\sqrt{2})$.

Il piano perpendicolare alla sfera in T ha come normale la retta OT, quindi ha parametri direttori:

$a = 1 - 0 = 1,\quad b = 1 - 0 = 1,\quad c = -\sqrt{2} - 0 = -\sqrt{2}$. Quindi l'equazione del piano è:

$a(x - x_T) + b(y - y_T) + c(z - z_T) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 1 + y - 1 - \sqrt{2}(z + \sqrt{2}) = 0 \quad quindi:$

$x + y - \sqrt{2}\, z - 4 = 0$

Q8

Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx$$

e rappresentare graficamente la funzione primitiva passante per il punto $\left(\frac{2}{\pi}; 2\right)$.

Notiamo che:

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ (*)

Quindi:

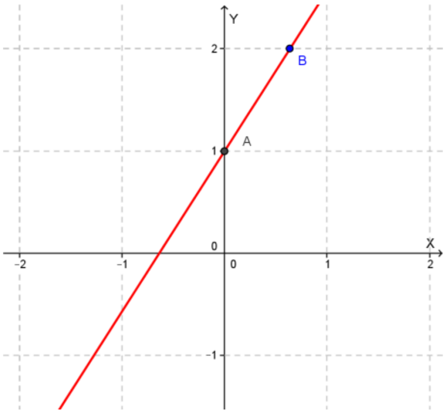
$$\int (\arcsin(x) + \arccos(x))\, dx = \frac{\pi}{2}x + k$$

La primitiva passante per il punto $\left(\frac{2}{\pi}; 2\right)$ è quella per cui:

$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} + k = 2 \quad da\ cui \quad k = 1$.

Quindi la primitiva richiesta ha equazione:

$y = \frac{\pi}{2}x + 1$ che rappresenta una retta:



<u>Osservazione</u>

Per dimostrare la relazione (*) si può procedere nel seguente modo:

poniamo $a = \arcsin(x) \quad da\ cui \quad x = \sin(a) \qquad e \quad b = \arccos(x) \quad da\ cui \quad x = \cos(b)$

Siccome $x = \cos(b) = sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$, $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - b$, $a = \frac{\pi}{2} - b$, $a + b = \frac{\pi}{2}$, $pertanto$:

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Q9

Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}\, dx$$

Notiamo che la funzione di equazione $y = \frac{1}{x \cdot \ln^2(x)}$ è continua nell'intervallo $[2; +\infty)$; quindi:

$$I=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int\frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}\,dx=\int(\ln(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{(\ln(x))^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{\ln(x)}+c$$

$$I=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln(b)}+\frac{1}{\ln(2)}\right]=0+\frac{1}{\ln(2)}=\frac{1}{\ln(2)}$$

Q10

In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni.
Determinare la probabilità che in 20 minuti:

a) non arrivi alcun treno;
b) ne arrivi uno solo;
c) ne arrivino al massimo quattro.

Si tratta di una distribuzione di probabilità di Poisson:

$p=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$ dove $\lambda=2$, quindi: $p=\frac{2^x\cdot e^{-2}}{x!}$.

a) x=0: $p(0)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=\frac{1}{e^2}\cong 0.135=13.5\ \%$

b) x=1: $p(1)=\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=\frac{2}{e^2}\cong 0.271=27.1\ \%$

c) $p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}+\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}+\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}+\frac{2^3\cdot e^{-2}}{3!}+\frac{2^4\cdot e^{-2}}{4!}=$

$$=\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}+\frac{2}{e^2}+\frac{4}{3\,e^2}+\frac{2}{3\,e^2}=\frac{1}{e^2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{e^2}\cong 0.947=94.7\ \%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri