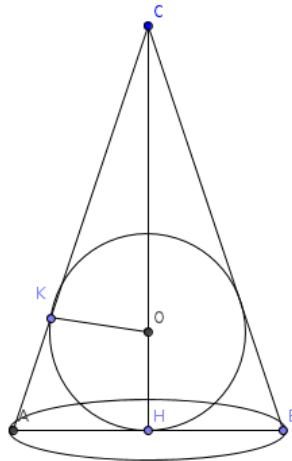


SIMULAZIONE - 25 FEBBRAIO 2015 - PROBLEMA 2

Consideriamo il cono circoscritto alla sfera di raggio R



$$CH = h > 2R, \quad AH = r > R$$

1) 2)

Dobbiamo determinare il cono di superficie totale minima.

La superficie totale del cono è data da:

$$S = \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot a, \text{ essendo } r \text{ ed } a \text{ rispettivamente il raggio e l'apotema del cono.}$$

Detta h l'altezza del cono, risulta:

$$S = \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

Notiamo che i triangoli AHC e KOC sono simili, quindi risulta:

$CH:AH=CK:KO$ e risulta:

$$CH=h, \quad AH=r, \quad CK = \sqrt{CO^2 - KO^2} = \sqrt{(h - R)^2 - R^2} = \sqrt{h^2 - 2hR}, \quad KO=R.$$

Quindi:

$$h:r = \sqrt{h^2 - 2hR} : R \Rightarrow r = \frac{h \cdot R}{\sqrt{h^2 - 2hR}} \Rightarrow r^2 = \frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR}, \text{ pertanto:}$$

$$\begin{aligned}
S &= \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = \pi \cdot \left(r^2 + \sqrt{r^2(h^2 + r^2)} \right) = \\
&= \pi \cdot \left(\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} + \sqrt{\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} \cdot \left(h^2 + \frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} \right)} \right) = \\
&= \pi \cdot \left(\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} + \sqrt{\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} \cdot \left(\frac{h^4 - 2h^3 R + h^2 R^2}{h^2 - 2hR} \right)} \right) = \\
&= \pi \cdot \left(\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} + \frac{hR}{h^2 - 2hR} \cdot \sqrt{h^4 - 2h^3 R + h^2 R^2} \right) = \\
&= \pi \cdot \left(\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} + \frac{h^2 R}{h^2 - 2hR} \cdot \sqrt{h^2 - 2hR + R^2} \right) = \pi \cdot \left(\frac{h^2 R^2}{h^2 - 2hR} + \frac{h^2 R}{h^2 - 2hR} \cdot (h - R) \right) = \\
&= \pi \cdot h^2 R \cdot \frac{R + h - R}{h^2 - 2hR} = \pi \cdot h^2 R \cdot \frac{h}{h(h - 2R)} = \pi R \cdot \frac{h^2}{h - 2R} \quad \text{con } h > 2R
\end{aligned}$$

S è minima se lo è:

$$y = y(h) = \frac{h^2}{h - 2R}$$

Risulta:

$$y' = \frac{h^2 - 4hR}{(h - 2R)^2} \geq 0 \quad \text{se } h^2 - 4hR \geq 0 : \quad h \leq 0 \quad \text{oppure } h \geq 4R \quad \text{quindi } y \text{ è crescente se}$$

$h > 4R$, decrescente se $2R < h < 4R$; pertanto y (e quindi S) è minima se $h = 4R$:
per tale valore di h si ottiene:

$$r = \frac{h \cdot R}{\sqrt{h^2 - 2hR}} = \frac{4R^2}{\sqrt{8R^2}} = R\sqrt{2}$$

3)

Indicata con $R_1(t)$ la resistenza all'usura della prima pellicola in funzione del tempo t (in anni), e con R_0 la resistenza all'usura per $t=0$, dato che ogni anno la pellicola perde il 3% della resistenza all'usura che ha a inizio anno, risulta:

$$R_1(t) = R_0 - 0.03 \cdot R_0 = R_0 \cdot (1 - 0.03) \quad \text{dopo 1 anno (t=1)}$$

$$R_1(t) = R_0 \cdot (1 - 0.03) - 0.03 \cdot R_0 \cdot (1 - 0.03) = R_0 \cdot (1 - 0.03)^2 \quad \text{dopo 2 anni (t=2)}$$

In generale, dopo t anni, risulta:

$$R_1(t) = R_0 \cdot (1 - 0.03)^t = R_0 \cdot 0.97^t$$

Indicata con $R_2(t)$ la resistenza all'usura della seconda pellicola in funzione del tempo t (in anni), e con R_0 la resistenza all'usura per t=0, dato che ogni anno la pellicola perde il 3% della resistenza all'usura iniziale, risulta:

$$R_2(t) = R_0 - 0.02 \cdot R_0 = R_0 \cdot (1 - 0.02) \quad \text{dopo 1 anno (t=1)}$$

$$R_2(t) = R_0 \cdot (1 - 0.02) - 0.02 \cdot R_0 = R_0 \cdot (1 - 2 \cdot 0.02) \quad \text{dopo 2 anni (t=2)}$$

In generale, dopo t anni, risulta:

$$R_2(t) = R_0 \cdot (1 - 0.02 \cdot t)$$

Sappiamo che la pellicola deve essere cambiata quando la sua resistenza all'usura risulta inferiore al 30% della sua resistenza iniziale (che è la stessa per entrambe le pellicole).

La prima pellicola deve essere cambiata quando:

$$R_0 \cdot 0.97^t < 0.30 \cdot R_0 \quad \text{da cui} \quad 0.97^t < 0.30 \quad , \quad t \cdot \ln(0.97) < \ln(0.30) \quad , \quad t > \frac{\ln(0.30)}{\ln(0.97)} \cong 39.53$$

Quindi la prima pellicola deve essere cambiata dopo 39.53 anni.

La seconda pellicola deve essere cambiata quando:

$$R_0 \cdot (1 - 0.02 \cdot t) < 0.30 \cdot R_0 \quad \text{da cui} \quad 1 - 0.02 \cdot t < 0.30 \quad , \quad t > \frac{1-0.30}{0.02} = 35$$

Quindi la seconda pellicola deve essere cambiata dopo 35 anni.

Essendo il costo unitario delle due pellicole lo stesso, **è più conveniente scegliere la prima pellicola**, che deve essere sostituita dopo 39.53 anni, mentre la seconda deve essere sostituita dopo 35 anni.