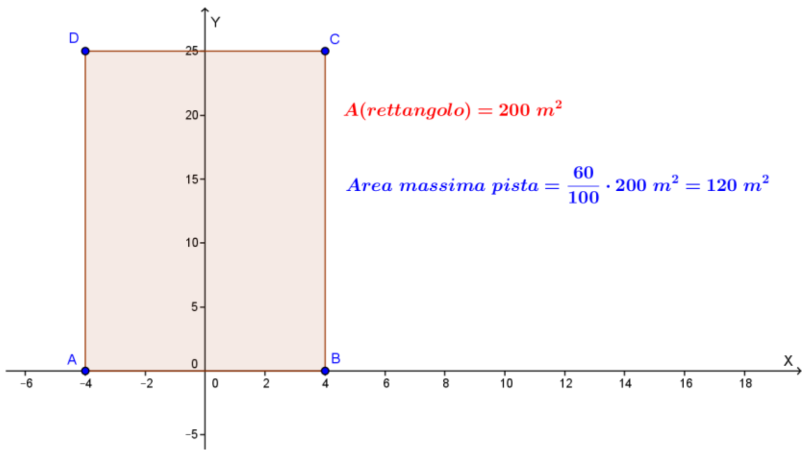
SESSIONE SUPPLETIVA - 2015

PROBLEMA 1

Sei stato incaricato di progettare una pista da ballo all'esterno di un locale in costruzione in una zona balneare. Il progetto prevede, oltre alla pista, delle zone verdi e una tettoia che consenta l'uso della pista anche in caso di pioggia.
La pista da ballo viene rappresentata, in un sistema di riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponde a 1 metro, all'interno del rettangolo avente come vertici i punti di coordinate (-4, 0), (4, 0), (-4, 25) e (4, 25); nella scelta della sagoma della pista va rispettato il vincolo urbanistico che stabilisce che essa non può occupare più del 60% della superficie di tale rettangolo.



Un tuo collaboratore predispone due soluzioni: la prima è rappresentata dalla parte di piano compresa tra l'asse x e la curva di equazione, $y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ *,* $x \in [-4; 4]$*, la seconda dalla parte di piano compresa tra l'asse x, la curva di equazione* $y = \frac{100}{4+x^2}$ *e le rette* $x = -2\sqrt{3}$ *,* $x = 2\sqrt{3}$ *.*

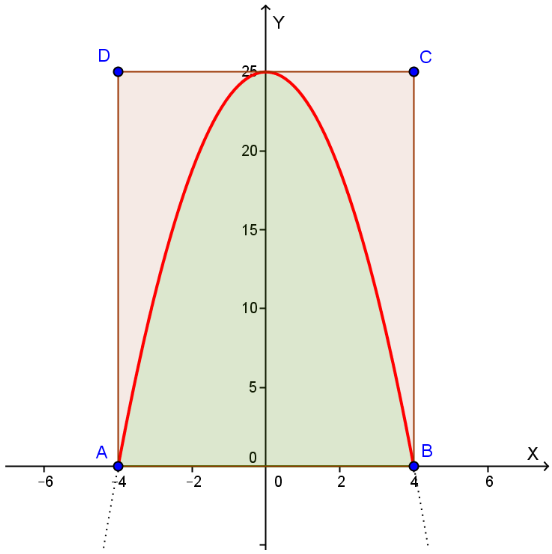
1)

Studia le due soluzioni, e traccia il grafico di entrambe nel riferimento cartesiano Oxy. Individua in particolare le caratteristiche delle due funzioni che sono più rilevanti nella fase di costruzione della pista: eventuali punti di massimo e di minimo, di flesso, angolosi.

Studiamo la prima soluzione.

$y = -\frac{25}{16}x^2 + 25$ rappresenta una parabola con asse coincidente con l'asse y, vertice nel punto $V = (0; 25)$, con la concavità rivolta verso il basso; per $x = \pm 4$ abbiamo $y = 0$.

La prima soluzione per la pista è rappresentata nella figura seguente:



La funzione proposta per la prima soluzione ha un massimo (assoluto) nel punto V=(0,25), non ha punti di flesso, né punti angolosi (se consideriamo il contorno della pista abbiamo due punti angolosi in (4;0) e (-4;0).

Studiamo la seconda soluzione.

$$y = \frac{100}{4 + x^2}$$

Questa funzione è definita su tutto l'asse reale, è pari, sempre positiva ed ha un massimo assoluto per x=0, pari a 25. Per x che tende a $\pm\infty$ la funzione tende a 0^+.
Studiamo la derivata prima:

$y' = -\frac{200x}{(x^2+4)^2} \geq 0, \; se \; x \leq 0$: la funzione è crescente se x<0 e decrescente se x>0; come già osservato in x=0 abbiamo un massimo relativo (e assoluto), di valore 25.

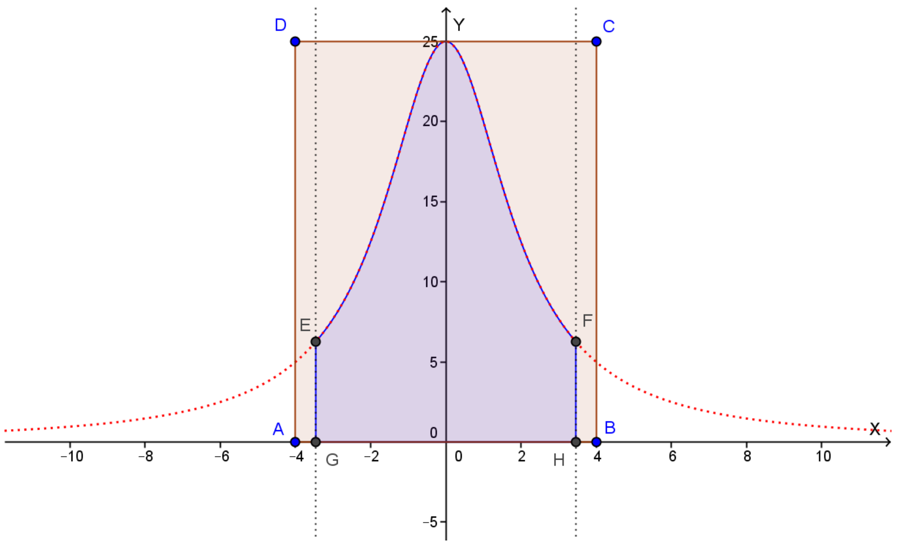
Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{600x^2 - 800}{(x^2+4)^3} \geq 0 \quad se \quad 600x^2 - 800 \geq 0, \; 3x^2 - 4 \geq 0 : \; x \leq -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad or \quad x \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

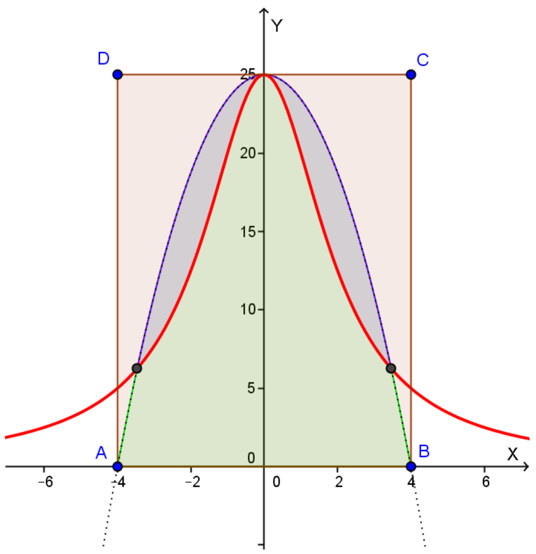
Il grafico della funzione ha quindi la concavità verso l'alto se $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad or \quad x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e verso il basso se $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Abbiamo due flessi per $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, di ordinata $\frac{75}{4} = 18.75$.

La funzione non presenta punti angolosi (se consideriamo il contorno della pista abbiamo dei punti angolosi in E, F, G, H).

La seconda soluzione per la pista è rappresentata nella figura seguente:



Il proprietario del locale sceglie la seconda soluzione, che ritiene più elegante, ma ti chiede di realizzare due aiuole nelle porzioni di terreno comprese tra le due curve che gli hai proposto.



2)

Determina l'area della soluzione scelta e verifica che essa rispetti i vincoli urbanistici, in modo da poter poi procedere all'acquisto del materiale necessario per la costruzione della pista.

L'area della soluzione scelta (la seconda) si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(pista\ 2) = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{100}{4+x^2}\, dx = 2\int_{0}^{2\sqrt{3}} \frac{100}{4+x^2}\, dx$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{100}{4+x^2}\, dx = 100\int \frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}\, dx = 25\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = 50\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= 50\, arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Quindi:

$$Area(pista\ 2) = 2\int_{0}^{2\sqrt{3}} \frac{100}{4+x^2}\, dx = 2\left[50\, arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\sqrt{3}} = 100\left[arctg(\sqrt{3}) - 0\right] =$$

$= 100 \cdot \frac{\pi}{3}\ m^2 \cong 104.72\ m^2$ che è minore del massimo previsto di $120\ m^2$:

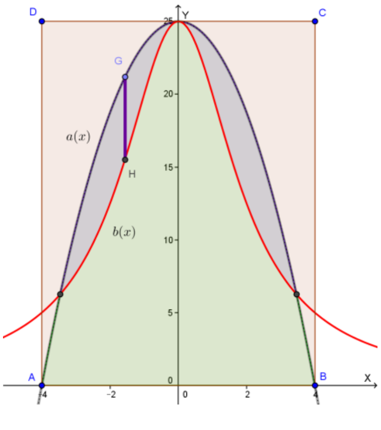
sono quindi rispettati i vincoli urbanistici.

Poiché lo scavo effettuato ai lati della pista ha reso il terreno scosceso, hai fatto eseguire delle misure e hai verificato che sia per $x \in [-2\sqrt{3}; 0]$ *che per* $x \in [0; 2\sqrt{3}]$ *la profondità dello scavo stesso varia con la legge lineare rappresentata dalla funzione* $f(x) = |x| + 1$; *è dunque necessario acquistare del terreno per riempire lo scavo e realizzare le aiuole richieste.*

3)

Calcola quanti metri cubi di terreno vegetale sono necessari per riempire l'aiuola delimitata dalle suddette curve nell'intervallo $[-2\sqrt{3}; 0]$.

Dobbiamo determinare il volume dell'aiuola situata nel secondo quadrante, tenendo presente come varia la profondità dello scavo.



Il volume richiesto può essere visto come somma di infiniti rettangoli di dimensioni $\left(a(x) - b(x)\right)\ ed\ f(x)$, somma estesa all'intervallo $[-2\sqrt{3}; 0]$, dove:

$$a(x) = -\frac{25}{16}x^2 + 25\ ,\quad b(x) = \frac{100}{4+x^2}\ ,\quad f(x) = |x| + 1$$

Tale volume si calcola quindi mediante il seguente integrale definito (per le intersezioni tra a(x) e b(x) vedi la nota):

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{0} [a(x) - b(x)] \cdot f(x)dx$$

$$V(scavo\ aiuola\ secondo\ quadrante) = \int_{-2\sqrt{3}}^{0} [a(x) - b(x)] \cdot f(x)dx\ =$$

$$= \int_{-2\sqrt{3}}^{0} \left[-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right] \cdot (|x| + 1)dx =$$

$$= \int_{-2\sqrt{3}}^{0} \left[-\frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right] \cdot (-x + 1)dx =$$

$$= \int_{-2\sqrt{3}}^{0} \left[\frac{25}{16}x^3 - 25x + \frac{100x}{4+x^2} - \frac{25}{16}x^2 + 25 - \frac{100}{4+x^2}\right] \cdot dx\ = V$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{100x}{4+x^2}$:

$$\int \frac{100x}{4+x^2}\ dx = 50 \int \frac{2x}{4+x^2} dx = 50 \cdot \ln(4+x^2)$$

Risulta pertanto:

$$V = \left[\frac{25}{64}x^4 - \frac{25}{2}x^2 + 50 \cdot \ln(4+x^2) - \frac{25}{48}x^3 + 25x - 50\ arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2\sqrt{3}}^{0} =$$

$$= 50 \cdot \ln(4) - \left(\frac{25}{64} \cdot 144 - \frac{25}{2} \cdot 12 + 50 \cdot \ln(16) + \frac{25}{48} \cdot 24\sqrt{3} - 50\sqrt{3} + 50arctg(\sqrt{3})\right) =$$

$$= \left(50 \cdot \ln(4) - \frac{225}{4} + 150 - 50\ln(16) - \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3} + 50\sqrt{3} - \frac{50}{3}\pi\right) m^3 =$$

$$= \left(\frac{375}{4} - 50 \cdot \ln(4) + \frac{75}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{50}{3}\pi\right) m^3 \cong 37.027\ m^3 \cong 37\ m^3 \cong V(scavo\ aiuola)$$

Per riempire l'aiuola indicata occorrono circa $37\ \mathrm{m}^3$ di terreno vegetale.

Nota

L'intersezione delle due curve proposte per il contorno delle piste, appartenente al secondo quadrante si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{25}{16}x^2 + 25 \\ y = \frac{100}{4+x^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{25}{16}x^2 + 25 = \frac{100}{4+x^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0\ , x_3 = -2\sqrt{3}, x_4 =\ 2\sqrt{3}$$

Per realizzare la tettoia, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxyz, tale piano deve passare per i punti (-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4), *in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.*

4)

Determina l'equazione del piano prescelto.

L'equazione del piano prescelto si ottiene imponendo alla generica equazione del piano:

$ax + by + cz + d = 0$

il passaggio per i punti di coordinate *(-4, 0, 5), (4, 0, 5) e (0, 25, 4);* quindi:

$\begin{cases} -4a + 5c + d = 0 \\ 4a + 5c + d = 0 \\ 25b + 4c + d = 0 \end{cases}$ sommando le prime due equazioni otteniamo: $d = -5c$

Sottraendo le prime due equazioni otteniamo: $a = 0$

Dalla terza equazione si ottiene:

$25b + 4c - 5c = 0 \quad da\ cui \quad c = 25b;$ quindi:

$\begin{cases} a = 0 \\ b = b \\ c = 25b \\ d = -5c = -125b \end{cases}$ il piano ha quindi equazione: $by + 25bz - 125b = 0$,

$y + 25z - 125 = 0$: equazione del piano della tettoia.

Con la collaborazione di Angela Santamaria