SESSIONE SUPPLETIVA - 2015

PROBLEMA 2

La rotazione intorno all'asse x dei grafici della famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} \quad con \ \ x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \le x \le k^2 \ , \quad k \in \mathbb{R} \ , \quad k > 0$$

genera dei solidi di rotazione di forma aerodinamica.

1)

In un riferimento cartesiano Oxy, traccia i grafici delle funzioni $f_k(x), \ \ per \ \ k = 1,$ $k = 2, \ \ k = 3$ *e determina il valore di k per il quale il volume del solido di rotazione assume il valore* $\frac{64\pi}{192}$.

Studiamo la generica funzione: $y = f_k(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x}$

Dominio: la funzione esiste quando $k^2 - x \ge 0 \ , \ \ quindi: \ \ se \ x \le k^2$; il dominio della funzione è quindi quello fornito: $0 \le x \le k^2$; in tale intervallo la funzione non è mai negativa.

Visto il dominio, **la funzione non può essere pari né dispari**.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

$Se \ x = 0, \qquad y = 0. \quad Se \ y = 0 \ , x = 0 \ \ ed \ x = k^2$

Essendo la funzione continua in un intervallo chiuso e limitato **non occorre calcolare alcun limite.**

Derivata prima ($\frac{\partial}{\partial x}(f(x)) \ sta \ per \ derivata \ prima \ di \ f(x)$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\sqrt{k^2 - x}}{4k}\right) = \frac{2k^2 - 3x}{8k\sqrt{k^2 - x}}$$

Essendo $0 \le x \le k^2 \ \ e \ \ \ k > 0$, risulta:

$f'(x) \ge 0 \ \ se \ \ \ 2k^2 - 3x \ge 0 \ , \ \ \ 0 \le x \le \frac{2k^2}{3}$; quindi la funzione cresce se $0 \le x < \frac{2k^2}{3}$, decresce se $\frac{2k^2}{3} < x < k^2$: pertanto $x = \frac{2k^2}{3}$ è un punto di massimo relativo (e assoluto).

Notiamo che la funzione non è derivabile se $x = k^2$ e risulta:

$\lim_{x \to (k^2)^-} f'(x) = -\infty$

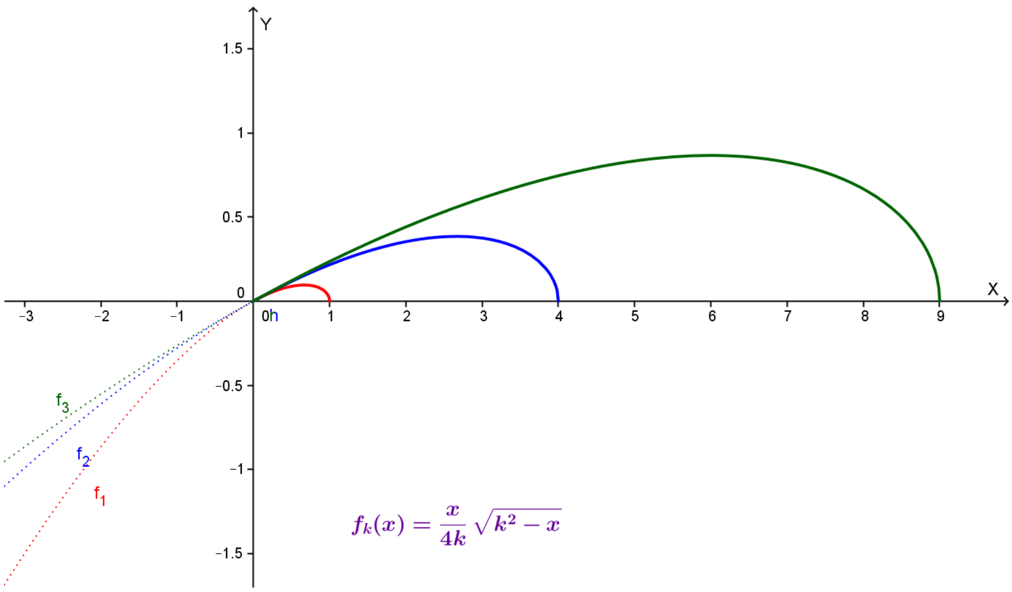
quindi $x = k^2$ è un punto a tangente verticale.

Derivata seconda ($\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f(x))\right)$ *sta per derivata seconda di* $f(x)$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x\sqrt{k^2-x}}{4k}\right) = \frac{3x-4k^2}{16k(k^2-x)^{3/2}}$$

Risulta $f''(x) \geq 0 \;\; se \;\; 3x - 4k^2 \geq 0$, $x \geq \frac{4}{3}k^2$: mai per le limitazioni sulla x; pertanto il grafico della funzione, per ogni k, volge la concavità verso il basso.

I grafici per k=1, k=2 e k=3 sono i seguenti:



Per k=1 il massimo assoluto ha coordinate: $M_1\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{3}}{18}\right)$

Per k=2 il massimo assoluto ha coordinate: $M_2\left(\frac{8}{3};\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

Per k=3 il massimo assoluto ha coordinate: $M_3\left(6;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Volume solido di rotazione: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

$$V = \pi\int_0^{k^2}\frac{x^2}{16k^2}(k^2-x)dx = \frac{\pi}{16k^2}\int_0^{k^2}(k^2x^2-x^3)dx = \frac{\pi}{16k^2}\cdot\left[\frac{k^2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{k^2} =$$

$$= \frac{\pi}{16k^2} \cdot \left[\frac{k^8}{3} - \frac{k^8}{4}\right] = \frac{\pi}{16k^2} \cdot \frac{k^8}{12} = \pi \cdot \frac{k^6}{192} = \frac{64\pi}{192} \quad se \quad k^6 = 64 \quad , \quad k = 2.$$

2)

Calcola il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k, e determina il valore dell'angolo formato dalla tangente al grafico di f_k con l'asse x per x=0.

Il diametro massimo dei solidi di rotazione è pari al doppio dell'ordinata del punto di massimo, quindi è dato da:

$$2f\left(\frac{2k^2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\frac{2k^2}{3}}{4k} \sqrt{k^2 - \frac{2k^2}{3}} = 2 \cdot \frac{k}{6}\sqrt{\frac{1}{3}k^2} = \frac{k}{3} \cdot k \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{k^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot k^2 = d\ max$$

Il diametro massimo dei solidi di rotazione in funzione di k è $\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot k^2$.

Per x=0 si ha:

$f'(0) = \frac{2k^2}{8k\sqrt{k^2}} = \frac{2k^2}{8k^2} = \frac{1}{4} = m = tg(\alpha)$, essendo α l'angolo formato con l'asse x dalla tangente al grafico di f_k per x=0. Risulta quindi:

$$tg(\alpha) = \frac{1}{4} \quad da\ cui \quad \alpha = arctg\left(\frac{1}{4}\right) = 14°2'10'',5$$

L'angolo formato con l'asse x dalla tangente al grafico di f_k per x=0 vale $14°2'10'',5$.

3)

Assumendo che la distribuzione della massa sia omogenea, il baricentro del corpo di rotazione si trova sull'asse x, per ragioni di simmetria. Determina l'ascissa x_S del baricentro in funzione del parametro k, sapendo che vale:

$$x_S = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V}$$

dove gli estremi di integrazione a e b vanno scelti opportunamente, e V indica il volume del solido di rotazione.

Gli estremi a e b di integrazione sono rispettivamente: $a = 0 \quad e \quad b = k^2$, corrispondenti alle intersezioni con l'asse x del grafico della funzione $f_k(x)$.

Risulta:

$$x_S = \frac{\pi \int_a^b x[f_k(x)]^2 dx}{V} = \frac{\pi \int_0^{k^2} x\left[\frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x}\right]^2 dx}{\pi \cdot \frac{k^6}{192}} = \frac{192}{k^6} \cdot \frac{1}{16k^2} \cdot \int_0^{k^2} x^3(k^2 - x)dx =$$

$$= \frac{12}{k^8} \cdot \int_0^{k^2} (k^2x^3 - x^4)dx = \frac{12}{k^8} \cdot \left[\frac{k^2x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{k^2} = \frac{12}{k^8} \cdot \left[\frac{k^{10}}{4} - \frac{k^{10}}{5}\right] = \frac{12}{k^8} \cdot \frac{k^{10}}{20} = \frac{3k^2}{5}$$

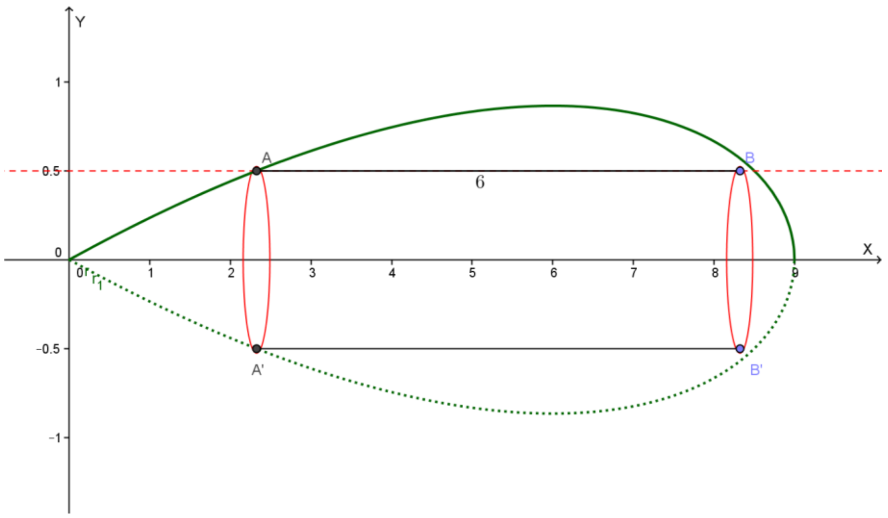
L'ascissa x_S del baricentro in funzione del parametro k è $x_S = \frac{3k^2}{5}$.

4)

All'interno del solido di rotazione generato da f_k, per $k = 3$, si vorrebbe collocare un cilindro di raggio 0,5 e di altezza 6. Verifica se ciò è possibile, motivando la tua risposta.

Il cilindro indicato ha volume: $V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot 0.5^2 \cdot 6 = \frac{3}{2}\pi \cong 4.712$.
Il volume del solido di rotazione è $\pi \cdot \frac{k^6}{192}$, che, per k=3, assume il valore: 11.928
Quindi, dal punto di vista del volume il cilindro si può collocare.

Ricordiamo che il diametro massimo del solido di rotazione è $\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot k^2$, che per k=3 assume il valore $\sqrt{3}$; quindi il cilindro, che ha diametro uguale ad 1, può essere collocato con il piano di base perpendicolare all'asse x.
Cerchiamo l'intersezione della curva $f_3(x) = \frac{x}{4k}\sqrt{k^2 - x} = \frac{x}{12}\sqrt{9 - x}$ con la retta di equazione y=0.5 (graficamente si può già dire che ci sono due intersezioni):
$\frac{1}{2} = \frac{x}{12}\sqrt{9 - x}$ da cui, elevando al quadrato: $1 = \frac{x^2}{36}(9 - x)$, $36 = 9x^2 - x^3$,
$x^3 - 9x^2 + 36 = 0$: questa equazione ha una soluzione approssimata in $x = 2.3$ (per esempio con il metodo di bisezione si scopre che tale soluzione è compresa tra 2.3 e 2.4); siccome $2.3 + 6 = 8.3 < 9$ e $2.4 + 6 = 8.4 < 9$ il cilindro può essere collocato dentro il solido di rotazione che si ottiene per $k = 3$ se $f_3(8.3)$ *ed* $f_3(8.4)$ sono maggiori di 0.5. Ed in effetti risulta: $f_3(8.3) \cong 0.58 > 0.5$, $f_3(8.4) \cong 0.54 > 0.5$: quindi il cilindro è collocabile all'interno del solido di rotazione.



Con la collaborazione di Angela Santamaria