AMERICHE 2016 - PROBLEMA 1

Considerata la funzione $G: \Re \rightarrow \Re$ è così definita:

$$G(x)=\int_0^{2x} e^t\, sen^2(t)dt$$

svolgi le richieste che seguono.

1)

Discuti campo di esistenza, continuità e derivabilità della funzione $G(x)$. Individua gli intervalli di positività/negatività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

Osserviamo che la funzione integranda $g(x)=e^x\, sen^2(x)$ è definita, continua e derivabile su tutto l'asse reale. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (unito al teorema sulla derivata della funzione composta) **la G è definita, derivabile (e quindi continua) su tutto $\Re$**. Ricordiamo che:

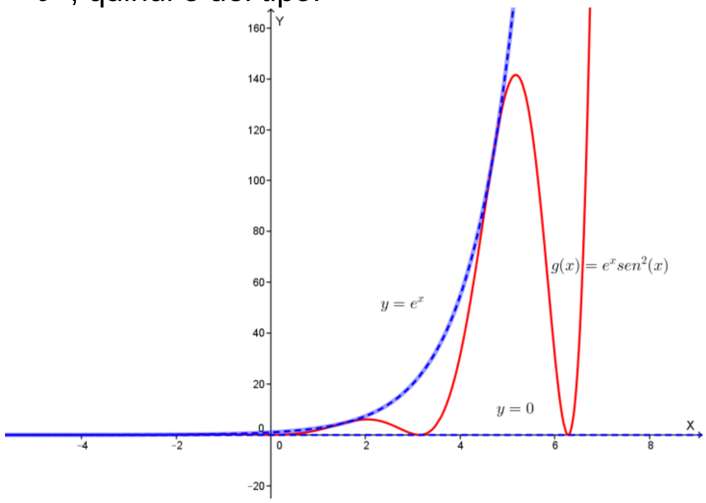
Se $G(x)=\int_a^{h(x)} g(t)\, dt$ allora $G'(x)=g(h(x))\cdot h'(x)$. Nel nostro caso si ha:

$G'(x)=2e^{2x}sen^2(2x)$

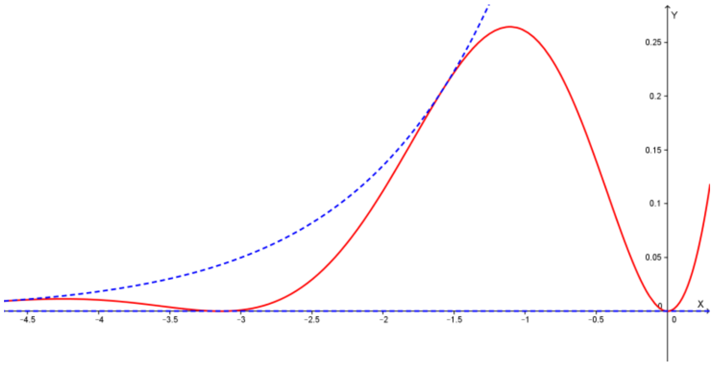
Studiamo la positività di $G(x)$.

La funzione $g(x)=e^x\, sen^2(x)$ è sempre positiva o nulla, in particolare, essendo

$0 \leq sen^2(x) \leq 1$ si ha che $0 \leq e^x\, sen^2(x) \leq e^x$; il grafico di $g(x)$ è quindi compreso fra i grafici di $y=0$ e $y=e^x$, quindi è del tipo:



Mostriamo un ingrandimento del grafico per x<0:



Possiamo quindi concludere (tenendo presente il significato geometrico della funzione integrale, legato all'area della regione delimitata dal grafico della funzione integranda e dall'asse x nell'intervallo [0,2x]) che:

Se $x > 0, G(x) > 0$ (… l'area va aumentando, e tende a più infinito per $x \to +\infty$)
Se x<0 risulta:
$G(x) = \int_0^{2x} e^t\ sen^2(t)dt = -\int_{2x}^0 e^t\ sen^2(t)dt < 0$ (… l'area fra 2x e 0 al crescere di x da meno infinito a zero diminuisce quindi G(x) aumenta perché equivale alla suddetta area cambiata di segno).
Se x=0 G(x)=0. Conclusione sul segno della funzione:

$G(x) > 0\ se\ x > 0, G(x) < 0\ se\ x < 0, G(x) = 0\ se\ x = 0.$

Eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

Abbiamo già osservato che se $x = 0,\ G(x) = 0$, quindi il grafico passa per l'origine degli assi cartesiani. In base a quanto osservato nello studio del segno della funzione, non abbiamo altre intersezioni con gli assi cartesiani.

2)

Determina l'esistenza degli asintoti della funzione $G(x)$, motivando opportunamente la risposta.

Trattandosi di una funzione continua su tutto l'asse reale non possono esserci asintoti verticali.

Abbiamo già osservato che se $x \to +\infty$ la funzione tende a $+\infty$, quindi potrebbe esserci asintoto obliquo. Essendo la funzione derivabile, è necessario che $G'(x) \to m$ (valore finito e coefficiente angolare dell'eventuale asintoto) per $x \to +\infty$. Abbiamo già detto che:

$G'(x) = 2e^{2x}sen^2(2x)$ e questa funzione, per $x \to +\infty$, non ammette limite, essendo:

$$0 \leq 2e^{2x}sen^2(2x) \leq 2e^{2x}$$

(la funzione si annulla infinite volte ma oscilla tra 0 e valori sempre più grandi; per farsi un'idea si può osservare l'andamento della funzione $e^x\ sen^2(x)$ indicato precedentemente).

Quindi: per $x \to +\infty$ non ci sono asintoti.

Vediamo ora cosa succede se $x \to -\infty$. Come già detto risulta $0 \le e^x\ sen^2(x) \le e^x$

Quindi se $x \to -\infty$ l'area compresa fra il grafico di $g(x) = e^x\ sen^2(x)$ e l'asse x fino ad x=0 è inferiore all'area fra il grafico di $y = e^x$ e l'asse x da $-\infty$ fino a zero; valutiamo quest'ultima area calcolando il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{0} e^t\, dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^t\, dt = \lim_{a\to-\infty} [e^t]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (1-e^a) = 1-0 = 1.$$

Pertanto l'area compresa fra il grafico di $g(x) = e^x\ sen^2(x)$ e l'asse x da $-\infty$ a 0 è un numero k positivo ma inferiore ad 1. Pertanto, se $x \to -\infty$, $G(x) \to -k, con\ 0 < k < 1$:

quindi abbiamo l'asintoto orizzontale $y = -k, con\ \ 0 < k < 1,\ \ se\ x \to -\infty$

3)

Individua i punti stazionari della funzione $G(x)$, riconoscendone la tipologia, e i punti di flesso. Disegna quindi il grafico della funzione, motivando le scelte fatte.

I punti stazionari sono quelli in cui si annulla la derivata prima (punti a tangente orizzontale), quindi si ricavano risolvendo la seguente equazione:

$$G'(x) = 2e^{2x} sen^2(2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad sen^2(2x) = 0,\quad 2x = k\pi\ , \qquad x = \frac{k\pi}{2}\ con\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Notiamo che $G'(x) = 2e^{2x} sen^2(2x) \ge 0$ per ogni x, quindi G(x) è sempre crescente:

i punti stazionari sono tutti punti di flesso a tangente orizzontale.

Cerchiamo i punti di flesso.

$$G''(x) = 4e^{2x}\ sen^2(2x) + 2e^{2x}(2sen(2x)(\cos(2x)) \cdot 2 =$$

$= 4e^{2x}[sen^2(2x) + 2sen(2x)\cos(2x)] \ge 0$ se $sen^2(2x) + 2sen(2x)\cos(2x) \ge 0$

$$sen(2x)(sen(2x) + 2\cos(2x)) \ge 0$$

Studiamo il segno dei due fattori del prodotto:

$\boldsymbol{sen(2x) \ge 0}$ se $2k\pi \le 2x \le \pi + 2k\pi$ da cui $\boldsymbol{k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi},\ \ con\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\boldsymbol{sen(2x) + 2\cos(2x) \ge 0}$, $\qquad 2sen(x)\cos(x) + 2\cos^2(x) - 2sen^2(x) \ge 0$,

se $\cos(x) = 0$ abbiamo $-2sen^2(x) \ge 0, -2 \ge 0\ \ mai$

(osserviamo che se cos(x)=0 allora $sen(x) = \pm 1$)

Se $\cos(x) \ne 0$ dividendo la $2sen(x)\cos(x) + 2\cos^2(x) - 2sen^2(x) \ge 0$ per $\cos^2 x$

otteniamo:

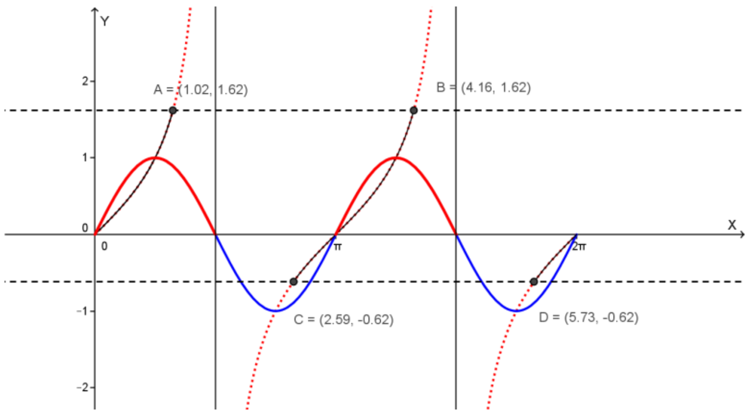
$\boldsymbol{2tg(x) + 2 - 2tg^2(x) \geq 0}$, $\quad tg^2(x) - tg(x) - 1 \leq 0$, $\quad \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq tg(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Risolviamo graficamente la disequazione

$sen(2x)(sen(2x) + 2\cos(2x)) \geq 0$

nell'intervallo $[0; 2\pi]$ dopo aver osservato che: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0.62$, $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.62$

Nel grafico sono marcati i tratti in cui il primo ed il secondo fattore sono positivi:



La disequazione è verificata dove i due fattori sono entrambi positivi/nulli o entrambi negativi/nulli, quindi negli intervalli:

$2k\pi \leq x \leq 1.02 + 2k\pi$, $\quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2.59 + 2k\pi$, $\quad \pi + 2k\pi \leq x \leq 4.16 + 2k\pi$,
$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq 5.73 + 2k\pi$ (k è intero relativo).

(ricordiamo che in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad sen(2x)(sen(2x) + 2\cos(2x)) = 0$).

In tali intervalli risulta $G''(x) \geq 0$, quindi G ha dei flessi nei punti:

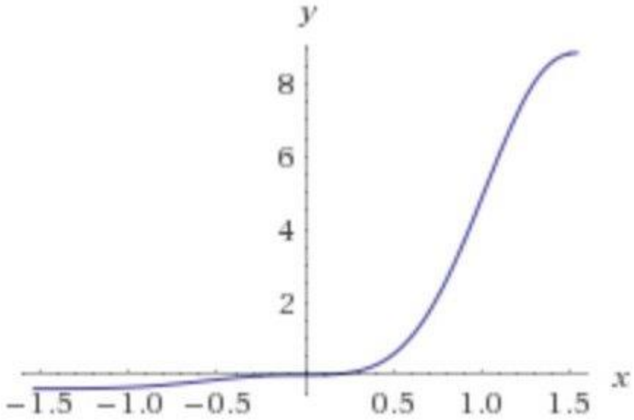
$x = 2k\pi$, $\quad x = 1.02 + 2k\pi$, $\quad x = 2.59 + 2k\pi$, $\quad x = \pi + 2k\pi$, $\quad x = 4.16 + 2k\pi$,

$x = 5.73 + 2k\pi$ ed anche in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

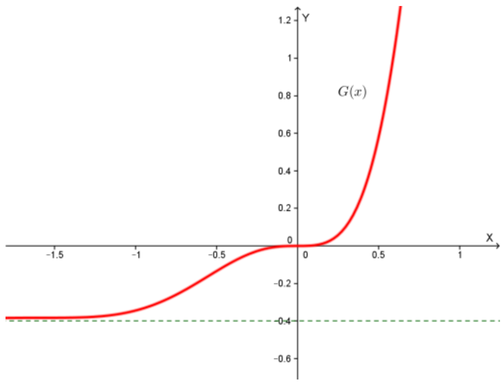
Notiamo che
$1.02 = arctg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \alpha,\ 2.59 = arctg\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \beta,\ 4.16 = \pi + \alpha, 5.73 = \pi + \beta$

Ricordiamo anche che per $x = \frac{k\pi}{2}\ con\ k \in \mathbb{Z}$ G ha dei flessi a tangente orizzontale.

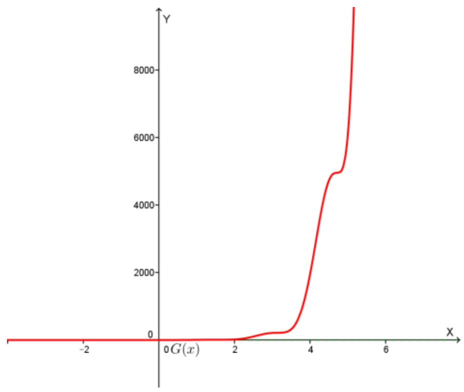
Grafico qualitativo di G:



Altro grafico di G con evidenziato l'asintoto orizzontale.



Altro grafico di G dove si vedono più flessi per x>0:



Notiamo che, anche se non richiesto, la funzione G ha la seguente equazione (che si può ottenere calcolando per parti l'integrale che definisce G):

$$-\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\,e^{2x}\,(-5+\cos(4x)+2\sin(4x))$$

4)

Studia l'andamento dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla funzione $G(x)$ nei suoi punti di flesso a tangente obliqua, determinando in particolare se tali rette formano un fascio di rette parallele.

I punti di flesso a tangente obliqua sono:

$x = 1.02 + 2k\pi = \boldsymbol{\alpha + 2k\pi}$,
$x = 2.59 + 2k\pi = \beta + 2k\pi$,
$x = 4.16 + 2k\pi = \pi + \alpha + 2k\pi = \boldsymbol{\alpha + (2k+1)\pi}$,
$x = 5.73 + 2k\pi = \pi + \beta + 2k\pi = \beta + (2k+1)\pi$

che si possono riassumere in: $x = \alpha + k\pi$ *e* $x = \beta + k\pi$ (flessi a tangente obliqua).

Ricordiamo che $G'(x) = 2e^{2x}sen^2(2x)$.

Ricordiamo la seguente formula goniometrica: $sen(2x) = \frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)}$; quindi si ha:

$x = \alpha + k\pi$ risulta: $sen(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1+tg^2(\alpha)} = \frac{2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$x = \beta + k\pi$ risulta: $sen(2\beta) = \frac{2tg(\beta)}{1+tg^2(\beta)} = \frac{2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Studiamo il coefficiente angolare nei punti di flesso $x = \alpha + k\pi$ è quindi:

$$G'(\alpha + k\pi) = 2e^{2(\alpha+k\pi)}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{8}{5}e^{2(\alpha+k\pi)} = \left(\frac{8}{5}e^{2\alpha}\right)e^{2k\pi}$$

Se $k \to +\infty$, $\left(\frac{8}{5}e^{2\alpha}\right)e^{2k\pi} \to +\infty$

Se $k \to -\infty$, $\left(\frac{8}{5}e^{2\alpha}\right)e^{2k\pi} \to 0^+$

I coefficienti angolari nei punti di flesso $x = \alpha + k\pi$ variano al variare di k, quindi le tangenti inflessionali non formano un fascio di rette parallele.

Studiamo il coefficiente angolare nei punti di flesso $x = \beta + k\pi$ è quindi:

$$G'(\beta + k\pi) = 2e^{2(\beta+k\pi)}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{8}{5}e^{2(\beta+k\pi)} = \left(\frac{8}{5}e^{2\beta}\right)e^{2k\pi}$$

Se $k \to +\infty$, $\left(\frac{8}{5}e^{2\beta}\right)e^{2k\pi} \to +\infty$

Se $k \to -\infty$, $\left(\frac{8}{5}e^{2\beta}\right)e^{2k\pi} \to 0^+$

I coefficienti angolari nei punti di flesso $x = \beta + k\pi$ variano al variare di k, quindi le tangenti inflessionali non formano un fascio di rette parallele.

Appendice a punto 4

I flessi a tangente obliqua si possono esprimere in forma più compatta osservando che la derivata seconda si annulla quando:

$sen(2x)(sen(2x) + 2\cos(2x)) = 0, \qquad sen^2(2x) + 2sen(2x)\cos(2x) = 0$

che si può scrivere, ponendo $\cos(2x) \neq 0$ (quando $\cos(2x) = 0$ la derivata seconda non si annulla) e dividendo per $\cos^2(2x)$, nella forma:

$tg^2(2x) + 2tg(2x) = 0$ che ha come soluzioni:

$tg(2x) = 0, da\ cui\ x = \frac{k\pi}{2}$ (flessi a tangente orizzontale)
$tg(2x) = -2$, da cui $2x = arctg(-2) + k\pi,\ \ x = -\frac{1}{2}arctg(2) + \frac{k\pi}{2}$

I punti di flesso a tangente obliqua si possono quindi raggruppare nella forma:

$$x = -\frac{1}{2}arctg(2) + \frac{k\pi}{2}$$

Da

$G'(x) = 2e^{2x}sen^2(2x)$

otteniamo ora in modo più compatto il coefficiente angolare delle tangenti nei punti di flesso a tangente obliqua, ricordando che (come visto precedentemente) $sen(2x) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$, quindi $sen^2(2x) = \frac{4}{5}$:

$G'(x) = \frac{8}{5} \cdot e^{-arctg(2)+k\pi}$

I coefficienti angolari nei punti di flesso a tangente obliqua variano al variare di k, quindi le tangenti inflessionali non formano un fascio di rette parallele.

Con la collaborazione di Angela Santamaria