AMERICHE 2016 - PROBLEMA 2

Sia Γ il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{1}{1+k\cdot e^{-x}} \qquad k\in\mathbb{R}, k>0$$

definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

1)

Relativamente al grafico Γ, mostra come variano le coordinate del suo punto di flesso P in funzione del parametro k e verifica che in tale punto la pendenza del grafico è indipendente da k.

Cerchiamo il flesso P.

$$f'(x)=\frac{k\cdot e^{-x}}{(1+k\cdot e^{-x})^2}=\frac{k\cdot e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+k)^2}=\frac{ke^x}{(e^x+k)^2}$$

$$f''(x)=\frac{ke^x(e^x+k)^2-ke^x[2(e^x+k)e^x]}{(e^x+k)^4}=\frac{ke^x(e^x+k)(e^x+k-2e^x)}{(e^x+k)^4}=\frac{ke^x(k-e^x)}{(e^x+k)^3}$$

$$f''(x)=\frac{ke^x(k-e^x)}{(e^x+k)^3}\geq 0 \quad se \quad (k-e^x)\geq 0, \qquad e^x\leq k\,,\ \ x\leq \ln(k)$$

Quindi Γ volge la concavità verso il basso se $x>\ln(k)$ e verso l'alto se $x<\ln(k)$

Quindi $x=\ln(k)$ è punto di flesso. Cerchiamo l'ordinata del flesso P:

$f(\ln(k))=\frac{1}{1+k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}$, *quindi* $P=\left(\ln(k);\frac{1}{2}\right)$; i flessi quindi appartengono alla retta $y=\frac{1}{2}$.

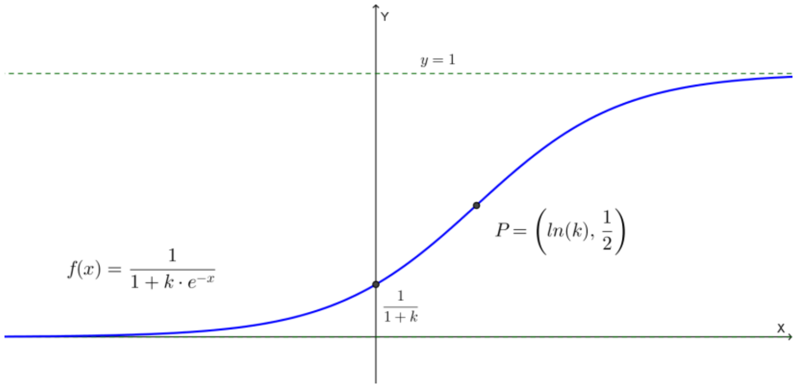
Calcoliamo il coefficiente angolare m della tangente inflessionale:

$$m=f'(\ln(k))=\left(\frac{ke^x}{(e^x+k)^2}\right)_{x=\ln(k)}=\frac{k^2}{(k+k)^2}=\frac{1}{4}:\ \ costante\ al\ variare\ di\ k.$$

Pertanto: nel punto di flesso $P=\left(\ln(k);\frac{1}{2}\right)$ la pendenza del grafico è indipendente da k.

Anche se non espressamente richiesto, abbiamo informazioni sufficienti per tracciare il grafico qualitativo della f(x). Essa è continua e positiva su tutto R, tende a 0 se x tende a

$-\infty$, tende a 1 se x tende a $+\infty$, è sempre crescente poiché $f'(x) = \frac{ke^x}{(e^x+k)^2}$ è sempre positiva, ha un flesso in $P = \left(\ln(k)\,;\frac{1}{2}\right)$.



2)

Dopo aver verificato che la funzione $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$ è una primitiva di f, determina l'area della regione piana compresa tra Γ, l'asse y, l'asse x e la retta di equazione $x = log(\alpha)$. Che valore deve assumere α perché tale area sia uguale a 1?

Calcoliamo la derivata di $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$:

$$p'(x) = \frac{-k \cdot e^{-x}}{1 + k \cdot e^{-x}} + 1 = \frac{1}{1 + k \cdot e^{-x}} = f(x)$$

Quindi p(x) è una primitiva di f(x).

Analizzando il valore $log(\alpha)$ osserviamo che deve essere $\alpha > 0$ ed inoltre:

$Se\ \alpha > 1,\ log(\alpha) > 0$ (in questo caso l'area è data da $\int_0^{log(\alpha)} f(x)dx$)

$Se\ 0 < \alpha < 1,\ log(\alpha) < 0$ (in questo caso l'area è data da $\int_{log(\alpha)}^0 f(x)dx$)

$Se\ \alpha = 1,\ log(\alpha) = 0$ (in questo caso l'area è nulla).

Valutiamo l'area richiesta quando $\alpha > 1$:

$$Area = \int_0^{log(\alpha)} f(x)dx = [\log(1 + k \cdot e^{-x}) + x]_0^{log(\alpha)} = log\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) + log(\alpha) - log(1 + k)$$

Se $0 < \alpha < 1$ risulta:

$$Area = \int_{log(\alpha)}^0 f(x)dx = -\left[log\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) + log(\alpha) - log(1 + k)\right]$$

In generale quindi, per $\alpha > 0$ (compreso il caso $\alpha = 1$), risulta:

$$Area = \left| log\left(1+\frac{k}{\alpha}\right) + log(\alpha) - log(1+k) \right|$$

Vediamo quando tale area vale 1:

se $\alpha > 1$ deve essere:

$$log\left(1+\frac{k}{\alpha}\right) + log(\alpha) - log(1+k) = 1, \qquad log\frac{\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)(\alpha)}{(1+k)} = 1, \qquad log\left(\frac{\alpha+k}{1+k}\right) = 1$$

$$\frac{\alpha+k}{1+k} = e, \quad \alpha + k = e(1+k), \quad \alpha = e(1+k) - k > 1 \ se\colon\ e + k(e-1) > 1, \qquad k > -1$$

e questo è verificato perché k>0.

se $0 < \alpha < 1$ deve essere:

$$log\left(1+\frac{k}{\alpha}\right) + log(\alpha) - log(1+k) = -1, \qquad log\frac{\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)(\alpha)}{(1+k)} = -1, \qquad log\left(\frac{\alpha+k}{1+k}\right) = -1$$

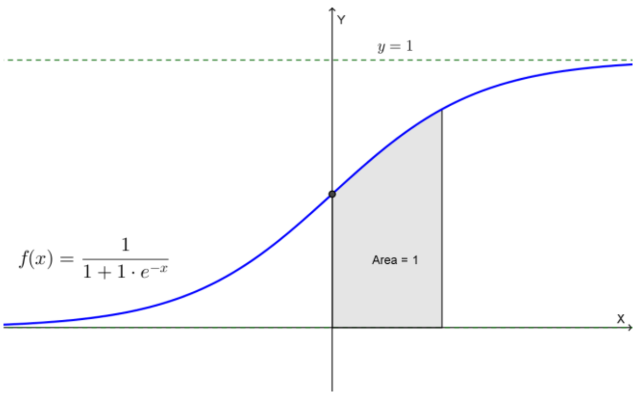
$\frac{\alpha+k}{1+k} = e^{-1}$, $\alpha + k = e^{-1}(1+k)$, $\alpha = e^{-1}(1+k) - k$ accettabile se:

$$\begin{cases} e^{-1}(1+k) - k > 0 \\ e^{-1}(1+k) - k < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} (1+k) - ke > 0 \\ (1+k) - ke < e \end{cases}, \quad \begin{cases} k(1-e) > -1 \\ k(1-e) < e-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} k < \dfrac{1}{e-1} \\ k > -1 \end{cases}, 0 < k < \frac{1}{e-1}$$

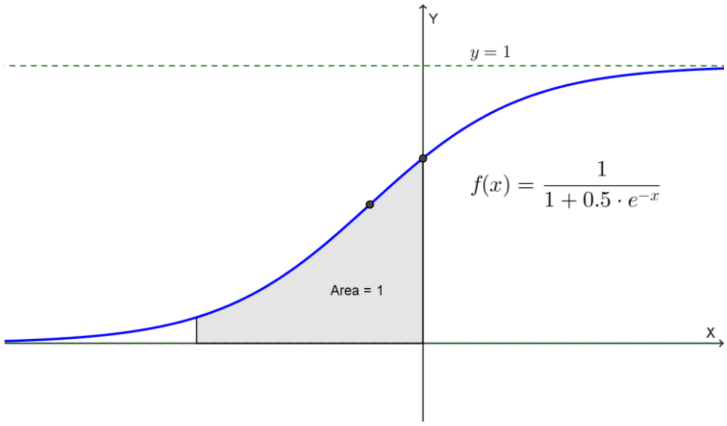
Quindi l'area è 1 (al variare di k) per i seguenti valori di α:

Se $\alpha > 1$ $\quad Area = 1$ per $\alpha = e(1+k) - k$, per ogni k>0.
Se $0 < \alpha < 1$ $\quad Area = 1$ per $\alpha = e^{-1}(1+k) - k$, purché sia $0 < k < \frac{1}{e-1}$.

Per esempio se k=1 abbiamo la seguente situazione grafica:



Per esempio se k=0.5 abbiamo la seguente situazione grafica:



3)

Dimostra che

$$g(x) = log\left(\frac{kx}{1-x}\right)$$

è la funzione inversa di f e tracciane il grafico. Prova inoltre che la suddetta funzione g è crescente in tutto il suo dominio e che il grafico della funzione h, definita come

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

interseca l'asse x in un unico punto.

Intanto osserviamo che la funzione $y = f(x) = \frac{1}{1+k\cdot e^{-x}}$ è strettamente crescente, quindi è invertibile. Per ricavare la funzione inversa dobbiamo esprimere x in funzione di y.

$y(1+k\cdot e^{-x}) = 1,\quad y + ky\cdot e^{-x} = 1,\quad e^{-x} = \frac{1-y}{ky}\,,\qquad -x = log\left(\frac{1-y}{ky}\right),$

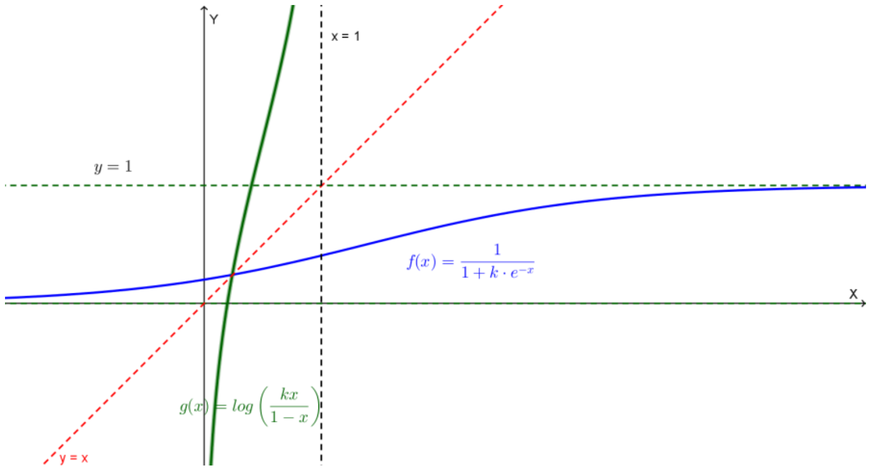
$x = -log\left(\frac{1-y}{ky}\right)$

$x = log\left(\frac{1-y}{ky}\right)^{-1},\quad x = log\left(\frac{ky}{1-y}\right)$

Quindi $g(x) = log\left(\frac{kx}{1-x}\right)$ è la funzione inversa di $f(x) = \frac{1}{1+k\cdot e^{-x}}$.

Ricordiamo che il grafico della funzione inversa di una funzione f è simmetrico rispetto alla retta y=x del grafico della f.

Il grafico della funzione di equazione $g(x) = f^{-1}(x) = log\left(\frac{kx}{1-x}\right)$ è il simmetrico del grafico della funzione di equazione $f(x) = \frac{1}{1+k\cdot e^{-x}}$ rispetto alla retta di equazione y=x:



Essendo g simmetrica di f rispetto alla retta y=x, dal fatto che f è strettamente crescente in tutto il suo dominio segue che anche g è strettamente crescente in tutto il suo dominio.

La proprietà richiesta (g crescente in tutto il suo dominio) può anche essere verificata direttamente studiando il segno della derivata di g:

$$g'(x) = D\left(ln\left(\frac{kx}{1-x}\right)\right) = \frac{\frac{k(1-x)-kx(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{kx}{1-x}} = \frac{\frac{k}{(1-x)^2}}{\frac{kx}{1-x}} = \frac{1}{x(1-x)} > 0 \; se \;\; 0 < x < 1$$

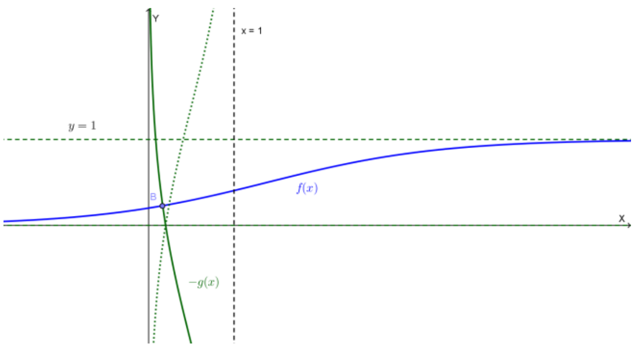
Ma g(x) è definita per $\frac{kx}{1-x} > 0$, cioè se $0 < x < 1$: quindi g è crescente in tutto il suo dominio.

Proviamo ora che il grafico della funzione

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

interseca l'asse x in un unico punto.

Le intersezioni con l'asse x i ottengono risolvendo l'equazione $f(x) + g(x) = 0$ che equivale a $f(x) = -g(x)$; i grafici di $y = f(x) \;\; e \;\; y = -g(x)$ si intersecano in un solo punto (fra 0 ed 1), come si può osservare dal grafico in cui sono rappresentate le due funzioni:



4)

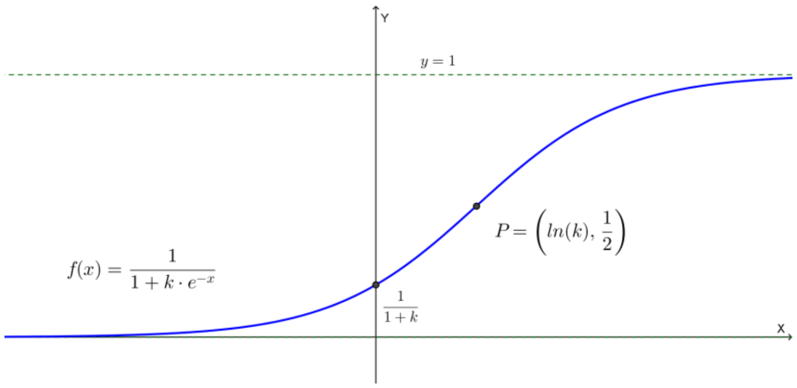
Considerata, per $x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

determina le equazioni dei suoi asintoti e traccia il grafico di $F(x)$.

Riportiamo per comodità il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + k \cdot e^{-x}} \qquad k \in \mathbb{R}, k > 0$$



Come già visto nel punto 2), una primitiva della f è $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$
Quindi l'equazione della funzione F(x) può essere ricavata analiticamente:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = [\log(1 + k \cdot e^{-t}) + t]_0^x = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x - \log(1 + k) =$$

$$= log \frac{1 + k \cdot e^{-x}}{1 + k} + x = F(x)$$

F(x) è continua e derivabile su tutto R, quindi non possono esserci asintoti verticali.
Vediamo se ci sono asintoti orizzontali o obliqui.

Notiamo che $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+k \cdot e^{-x}}$ e calcoliamo i limiti all'infinito:

$\lim_{x \to +\infty} F'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+k \cdot e^{-x}} = 1$: quindi può esserci asintoto obliquo con coefficiente angolare $m = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} [F(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[log \frac{1 + k \cdot e^{-x}}{1 + k} + x - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[log \frac{1 + k \cdot e^{-x}}{1 + k} \right] = \left[log \frac{1}{1 + k} \right] =$$

$$= -\log(1 + k) = q < 0$$

Quindi per $x \to +\infty$ abbiamo l'asintoto obliquo di equazione: $y = x - \log(1 + k)$, $k > 0$

Vediamo cosa succede se $x \to -\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} F'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+k\cdot e^{-x}} = 0^+$: quindi può esserci asintoto orizzontale.
Risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[log\frac{1+k\cdot e^{-x}}{1+k} + x\right]: forma\ indeterminata\ [+\infty - \infty]$$

Osserviamo che: $log\frac{1+k\cdot e^{-x}}{1+k} + x = log\frac{1+k\cdot e^{-x}}{1+k} + log\, e^x = log\frac{1+k\cdot e^{-x}}{1+k}\cdot e^x = log\frac{e^x+k}{1+k} \to$
$\to log\frac{k}{1+k}$ se $x \to -\infty$. Quindi se $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale $y = log\frac{k}{1+k}$.

Studio di $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

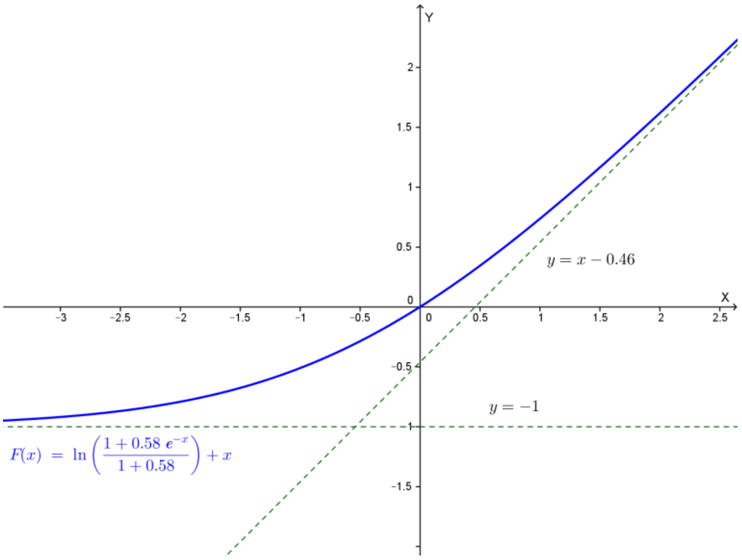
Possiamo dedurre un grafico qualitativo di F da quello di $f(x) = \frac{1}{1+k\cdot e^{-x}}$.
Se x=0 risulta F(x)=0. Se x>0 F(x) è positiva, crescente ed ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo di equazione: $y = x - \log(1+k)$.

Se x<0, F(x)<0 (si osservi l'area compresa tra f e l'asse x).

$\int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt = -Area(tra\ il\ grafico\ di\ f\ da\ x < 0\ a\ 0\ e\ l'assex)$ e siccome tale area, positiva, va decrescendo, il suo opposto va crescendo: quindi F è crescente anche per x<0: d'altronde la sua derivata è f(x), che è sempre positiva.
Abbiamo già detto che per $x \to -\infty$ F ha l'asintoto orizzontale $y = log\frac{k}{1+k} < 0$.
Analizziamo la derivata seconda di F:

$F''(x) = f'(x) > 0\ per\ ogni\ x$: la concavità del grafico di F è sempre verso l'alto.

Questo il grafico qualitativo di F (abbiamo posto $k = 0.58$):



Con la collaborazione di Angela Santamaria