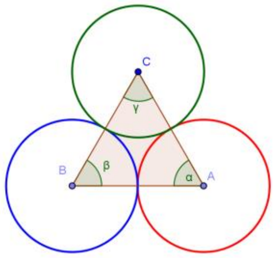
AMERICHE 2016 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Tre circonferenze di raggio 1 sono tangenti esternamente una all'altra. Qual è l'area della regione interna che esse delimitano?



Osserviamo che il triangolo ABC che ha per vertici i centri delle tre circonferenze è un triangolo equilatero di lato 2 (per esempio AB, congiungente i centri di due circonferenze tangenti esternamente, passa per il punto di tangenza ed ha lunghezza pari alla somma dei due raggi; in modo analogo si ragiona per AC e BC).

L'area S della regione delimitata dalle tre circonferenze ed esterna ad esse (triangolo curvilineo) si ottiene sottraendo all'area del triangolo ABC l'area di tre settori circolari di raggio 1 e ampiezza 60°; questi tre settori equivalgono ad un settore di raggio 1 e ampiezza 3x60°=180°, cioè ad un semicerchio di raggio 1, la cui area è quindi pari a $\frac{\pi}{2}$.
L'area del triangolo è uguale a

$$Area(ABC) = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

Quindi l'area richiesta è:

$$S = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

QUESITO 2

In un'urna ci sono 20 biglie, ognuna delle quali è rossa o nera. Stabilire quante sono quelle nere, sapendo che estraendo 2 biglie senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una biglia nera è 27/38.

Dette N le palline nere, le palline rosse R saranno 20-N. Detta p(RR) la probabilità di estrarre 2 palline rosse, la probabilità p di estrarne almeno una nera è data da:

$$p = p(almeno\ una\ nera) = 1 - p(entrambe\ rosse) = 1 - \frac{20-N}{20} \cdot \frac{19-N}{19} = \frac{27}{38}$$

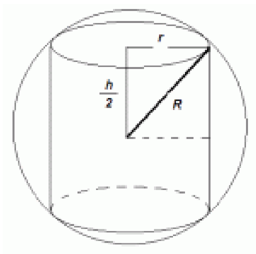
Otteniamo quindi la seguente equazione:

$$\frac{20-N}{20}\cdot\frac{19-N}{19}=\frac{11}{38}\,,(20-N)(19-N)=110\,,N^2-39N+270=0:\quad N=9,N=30$$

Dovendo essere 20 tutte le palline, quelle nere saranno 9.

QUESITO 3

Dato un cilindro equilatero e la sfera ad esso circoscritta, qual è la probabilità che un punto interno alla sfera cada all'interno del cilindro?



Il diametro di base $2r$ del cilindro equilatero è uguale all'altezza h, quindi $r=\frac{h}{2}$. Detto R il raggio della sfera circoscritta al cilindro si ha:

$$R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=r^2+r^2=2r^2,\ \ R=r\sqrt{2}$$

Calcoliamo i volumi dei due solidi:

$$V(cilindro)=\pi r^2h=\pi r^2(2r)=2\pi r^3$$
$$V(sfera)=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(r\sqrt{2}\right)^3=\frac{8}{3}\sqrt{2}\,\pi r^3$$

La probabilità che un punto interno alla sfera cada internamente al cilindro è:

$$p=\frac{V(cilindro)}{V(sfera)}=\frac{2\pi r^3}{\frac{8}{3}\sqrt{2}\,\pi r^3}=\frac{2}{\frac{8}{3}\sqrt{2}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}\cong 0.530\cong 53\ \%$$

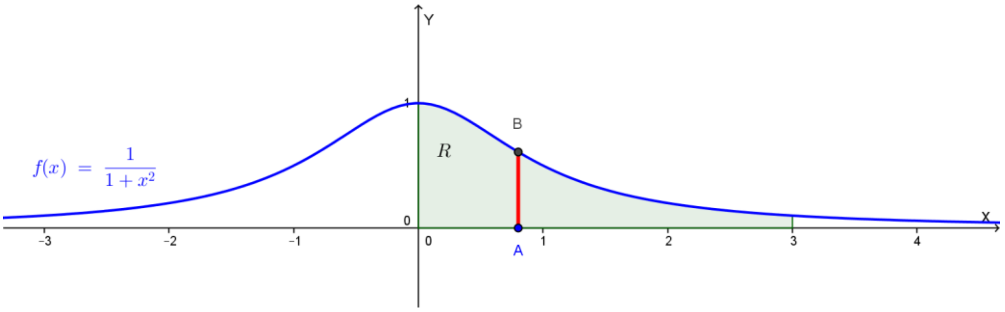
QUESITO 4

Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione:

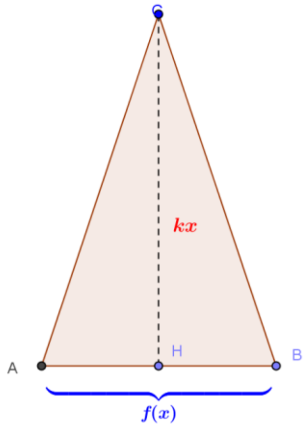
$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

e l'asse delle x nell'intervallo [0, 3]; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse x sono tutti triangoli isosceli di altezza kx, con $k\in\mathbb{R}$. Determinare k in modo che il volume del solido sia pari a 2.

Il grafico della funzione e la regione R sono facilmente rappresentabili graficamente:



La sezione è un triangolo isoscele di base AB e altezza kx:



L'area della sezione è quindi:

$$A(x) = \frac{1}{2} f(x) \cdot kx = \frac{kx}{2(1+x^2)}$$

Il volume richiesto è dato da:

$$V = \int_0^3 A(x)dx = \int_0^3 \frac{kx}{2(1+x^2)} dx =$$

$$= \frac{k}{4} \int_0^3 \frac{2x}{(1+x^2)} dx = \frac{k}{4} [\ln(1+x^2)]_0^3 = \frac{k}{4} \cdot \ln(10)$$

Il volume del solido deve essere uguale a 2, quindi:

$$V = \frac{k}{4} \cdot \ln(10) = 2, \qquad k = \frac{8}{\ln(10)}$$

QUESITO 5

Il grafico di un polinomio di 3° grado è tangente all'asse x nell'origine e interseca nuovamente l'asse x in un punto di ascissa positiva. L'ascissa e l'ordinata del punto di massimo relativo sono tra loro uguali e diverse da 0. Determinare l'area della regione piana limitata che è compresa tra l'asse x e il grafico del polinomio, sapendo che anche tale area coincide numericamente con il valore comune all'ascissa e all'ordinata nel punto di massimo.

Il polinomio ha equazione del tipo $y = p(x) = ax^2(x-b)$, con a<0 (se fosse a>0 il massimo relativo sarebbe per x=0) e b>0. Il termine x^2 deriva dal fatto che x=0 deve essere una radice doppia. Trattandosi di una funzione razionale intera, nel punto di massimo relativo (che è tra 0 e b) si annulla la derivata prima; quindi:

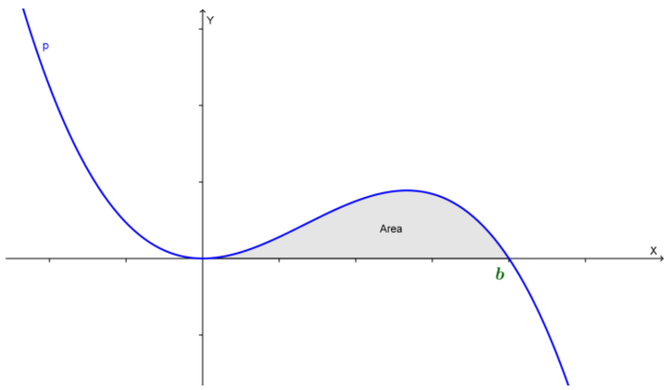
$p'(x) = 2ax(x-b) + ax^2 = 0 \;\; se\; x = 0 \;\; e\; se \;\; 2(x-b)+x = 0: \quad x = \frac{2}{3}b$ (punto di max)
Imponiamo che l'ordinata del punto di massimo relativo sia uguale all'ascissa:

$$p\left(\frac{2}{3}b\right) = \frac{4}{9}ab^2\left(-\frac{1}{3}b\right) = \frac{2}{3}b\,, \quad -\frac{2}{9}ab^2 = 1, \quad a = -\frac{9}{2b^2}$$

Il polinomio ha quindi equazione del tipo:

$$y = p(x) = -\frac{9}{2b^2}\cdot x^2(x-b)$$

Il grafico è del tipo:



L'area deve essere numericamente uguale all'ascissa (e all'ordinata) del punto di massimo relativo, quindi: $Area = \frac{2}{3}b$.
Ma l'area in questione è data dal seguente integrale:

$Area = \int_0^b -\frac{9}{2b^2}\cdot x^2(x-b)\; dx = -\frac{9}{2b^2}\cdot\int_0^b (x^3 - bx^2)\; dx = \frac{2}{3}b$ se:

$$\int_0^b (x^3 - bx^2)\; dx = -\frac{4}{27}b^3$$

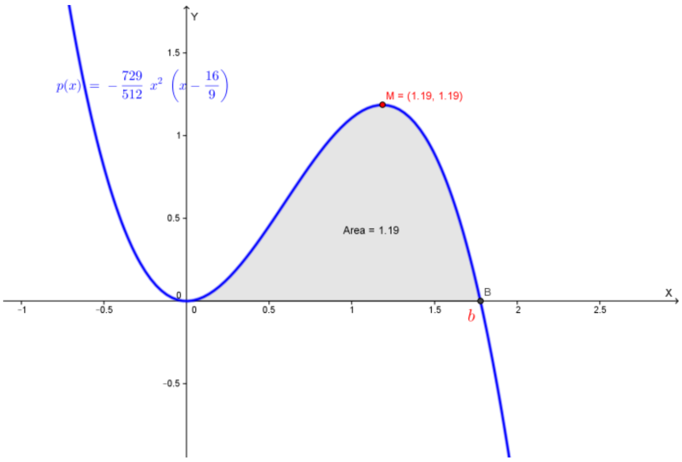
$$\int_0^b (x^3 - bx^2)\; dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{b}{3}x^3\right]_0^b = \frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{3} = -\frac{b^4}{12} = -\frac{4}{27}b^3 \quad se \quad b = \frac{16}{9}$$

L'area richiesta è uguale a $\frac{2}{3}b = \frac{2}{3}\cdot\frac{16}{9} = \frac{32}{27}$.

Osserviamo che il polinomio ha equazione: $p(x) = -\frac{9}{2b^2}\cdot x^2(x-b) = -\frac{729}{512}\cdot x^2\left(x - \frac{16}{9}\right)$

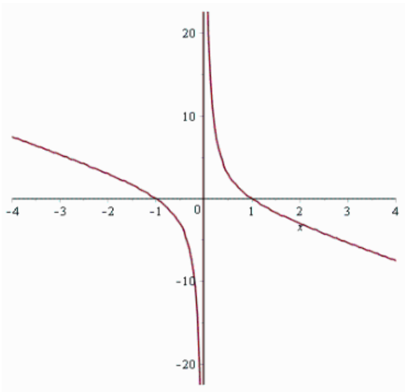
$$p(x) = -\frac{729}{512}\cdot x^2\left(x-\frac{16}{9}\right)$$

Il grafico di questa funzione è il seguente:



QUESITO 6

Il grafico in figura è quello della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$. Il grafico riportato è simmetrico rispetto all'origine ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 0$ e $5x + 2y = 0$.

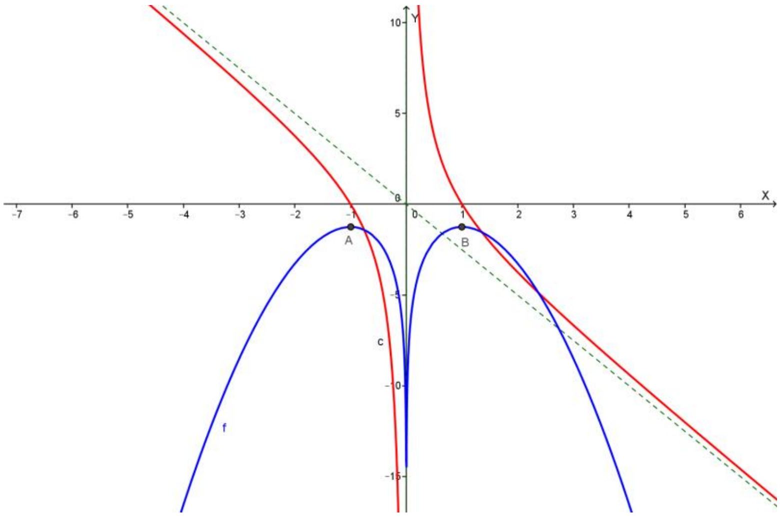


Descrivere le principali caratteristiche relative all'andamento della funzione $f(x)$ e tracciarne, indicativamente, un possibile grafico. Tracciare inoltre il grafico della funzione $f''(x)$.

Osservando il grafico della derivata della f possiamo dedurre che:

- f cresce se x<-1 e 0<x<1; f decresce per -1<x<0 e x>1
- f è pari perché la sua derivata è dispari: il grafico di f è quindi simmetrico rispetto all'asse delle y
- x=-1 e x=1 sono punti di massimo relativo
- f non è derivabile in x=0 (ma è continua per ipotesi), ed in particolare la derivata destra è $+\infty$ e la derivata sinistra $-\infty$, quindi x=0 è punto di cuspide verso il basso
- $f'(x)$ decresce se x<0 e se x>0, quindi $f''(x) < 0\ per\ x < 0\ e\ per\ x > 0$; pertanto il grafico di f volge la concavità verso il baso per x<0 e per x>0.

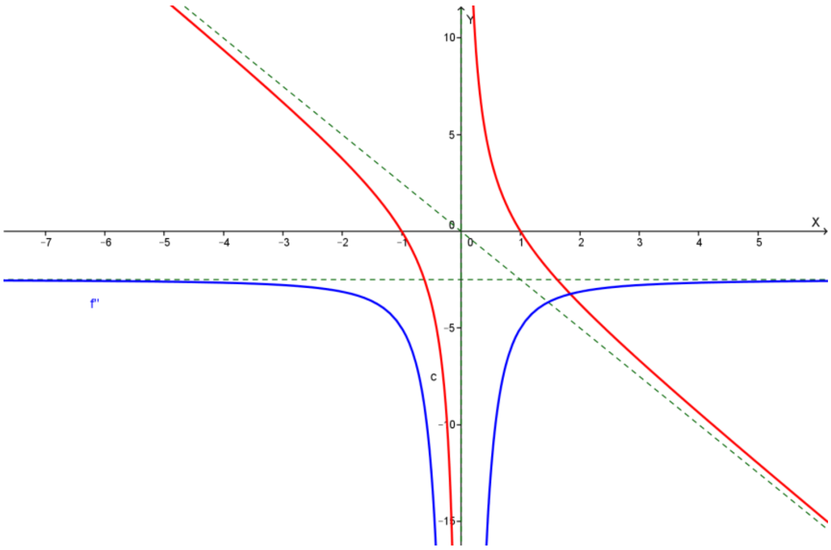
Il grafico di f è del seguente tipo (in blu):



Deduciamo ora dal grafico di $f'(x)$ le caratteristiche di $f''(x)$, che equivale a dedurre dal grafico di una funzione il grafico della sua derivata

- $f'(x)$ decresce se x<0 e se x>0, quindi la sua derivata, $f''(x)$, è negativa per x<0 e per x>0
- Dal grafico di $f'(x)$ deduciamo che se $x \to 0^+$ la sua derivata, $f''(x)$, tende a -∞ e se $x \to 0^-$ la sua derivata, $f''(x)$, tende ancora a -∞
- Se $x \to \infty$, $D\big(f'(x)\big) = f''(x) \to -\frac{5}{2}$: quindi $f''(x)$ ha l'asintoto orizzontale $y = -\frac{5}{2}$ sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$
- Essendo $f'(x)$ dispari la sua derivata $f''(x)$ è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

Grafico qualitativo di $f''(x)$, in blu:



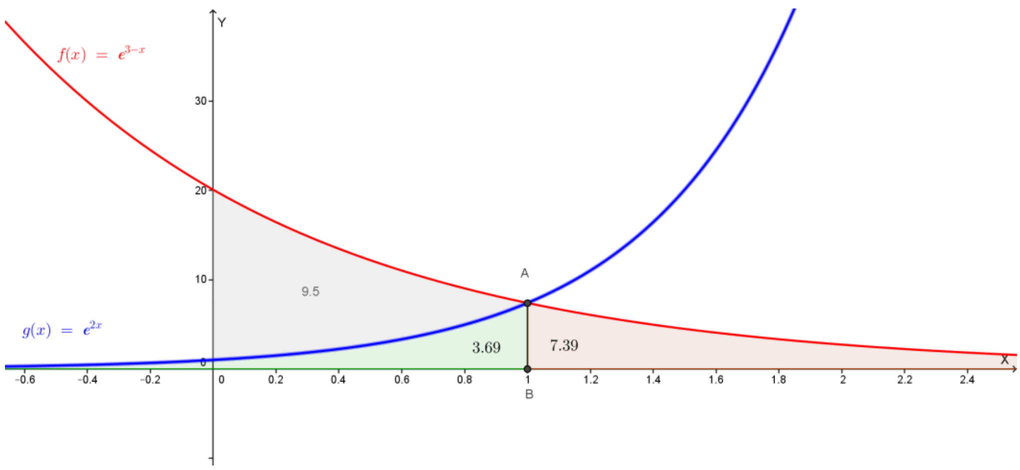
QUESITO 7

Sono date le funzioni $f(x) = e^{3-x}$ *e* $g(x) = e^{2x}$ *. Determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di f e di g.*

I grafici delle due funzioni si possono dedurre facilmente dai grafici della funzione esponenziale $y = e^x$. In particolare:

- il grafico di $f(x) = e^{3-x}$ si ottiene da quello di $y = e^x$ effettuando prima una traslazione verso sinistra di 3 unità (si ottiene in tal modo e^{3+x}) e poi un ribaltamento rispetto all'asse y (si scambia infatti x in –x).
- il grafico di $g(x) = e^{2x}$ si ottiene da quello di $y = e^x$ effettuando una contrazione orizzontale di fattore 2.

Rappresentiamo le due funzioni nello stesso piano cartesiano, osservando che hanno in comune il punto di ascissa 1:



Se l'area richiesta è quella della regione (illimitata!) RACCHIUSA dai grafici di f, g e dall'asse x, abbiamo:

$$Area = \int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{3-x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_a^1 = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{2a}\right) = \frac{1}{2}e^2 \cong\ 3.69$$

$$\int_{1}^{+\infty} e^{3-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} e^{3-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[-e^{3-x}]_1^b = \lim_{b\to+\infty}(-e^{3-b} + e^2) = e^2 \cong 7.39$$

Quindi:

$$Area = \int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{3-x}\,dx = \frac{1}{2}e^2 + e^2 = \frac{3}{2}e^2 \cong 11.08$$

Se l'area richiesta è quella della regione delimitata dai grafici di f, g e DALL'ASSE Y, come crediamo fosse nell'intenzione dell'estensore del quesito, abbiamo:

$$Area = \int_0^1 (e^{3-x} - e^{2x})\ dx = \left[-e^{3-x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = -e^2 - \frac{1}{2}e^2 - \left(-e^3 - \frac{1}{2}\right)$$

$$Area = e^3 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2} \cong 9.50$$

QUESITO 8

Un giocatore di basket si esercita ai tiri liberi. Normalmente ha una quota di canestri dell'80%. Con quale probabilità va a canestro esattamente due volte su tre tiri? Individua un evento E per il quale valga:

$$P(E) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$$

La probabilità p che il giocatore faccia canestro è 0.8, la probabilità q di non fare canestro è quindi 0.2.
La probabilità richiesta (distribuzione binomiale) si ottiene applicando la seguente formula (n=3 le prove, x=2 i successi):

$$p(n,x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = p(3,2) = \binom{3}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^1 = 3 \cdot 0.64 \cdot 0.2 = 3 \cdot 0.64 \cdot 0.2 =$$
$$= 0.384 = 38.4\ \%$$

Un evento E la cui probabilità sia quella indicata è il seguente:
"il giocatore indicato fa esattamente 40 canestri su 50 tiri".

QUESITO 9

Dati i punti $A(4,14,17), B(16,11,14), C(16,2,23)$*:*
a) si dimostri che il triangolo ABC *è isoscele e rettangolo;*
b) quali sono le coordinate del punto D *tale che* $ABCD$ *sia un quadrato?*

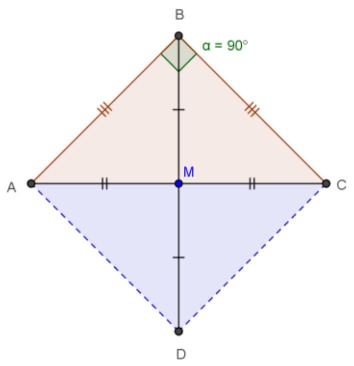
Calcoliamo le lunghezze dei tre lati del triangolo mediante la seguente formula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$AB = \sqrt{12^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{162}$, $AC = \sqrt{12^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{324}$,
$BC = \sqrt{0^2 + 9^2 + 9^2} = \sqrt{162}$

Il triangolo è quindi isoscele sulla base AC.
Osserviamo che: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, quindi il triangolo è rettangolo in B.

Affinché ABCD sia un quadrato D deve essere il simmetrico di B rispetto al punto medio M di AC:



Le coordinate di M sono: $M = (10; 8; 20)$
Cerchiamo le coordinate di D:

$$x_D = 2x_M - x_B = 20 - 16 = 4$$

$$y_D = 2y_M - y_B = 16 - 11 = 5$$

$$z_D = 2z_M - z_B = 40 - 14 = 26$$

Quindi le coordinate di D sono: $D = (4; 5; 26)$

QUESITO 10

Si considerino nello spazio il punto $P(1, 2, -1)$ ed il piano α di equazione
$$x - 2y + z + 4 = 0.$$
a) Verificare che $P \in \alpha$;
b) determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio 6 che sono tangenti ad α in P.

a) Le coordinate di P soddisfano l'equazione del piano.
b) I centri delle sfere richieste appartengono alla perpendicolare n in P al piano α. I parametri direttori di n sono quelli del piano, cioè (1; -2; 1). La retta n ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Posto $C = (1 + t; 2 - 2t; \ -1 + t)$, il raggio delle sfere richieste è dato dalla distanza CP. Deve quindi essere:
$CP^2 = 36$ da cui: $(1 + t - 1)^2 + (2 - 2t - 2)^2 + (-1 + t + 1)^2 = 36$
$$6t^2 = 36, \quad t^2 = 6, \qquad t = \pm\sqrt{6}$$
I centri delle sfere sono quindi:
$C_1 = \left(1 + \sqrt{6}; 2 - 2\sqrt{6}; \ -1 + \sqrt{6}\right)$ e $C_2 = \left(1 - \sqrt{6}; 2 + 2\sqrt{6}; \ -1 - \sqrt{6}\right)$.
Le sfere richieste hanno quindi equazioni:

$$\left[x - \left(1 \pm \sqrt{6}\right)\right]^2 + \left[y - \left(2 \mp 2\sqrt{6}\right)\right]^2 + \left[z - \left(-1 \pm \sqrt{6}\right)\right]^2 = 36$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria