SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2016 - PROBLEMA 1

La funzione $f: \Re \to \Re$ è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & per\ x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

1)

Prova che f è una funzione pari e che essa è derivabile in $x = 0$. Dimostra inoltre che la funzione f ha un massimo assoluto in $x = 0$.

Per dimostrare che la funzione è pari occorre dimostrare che $\mathrm{f(-x) = f(x)}$ per ogni x del dominio. Se $x = 0$ la proprietà è chiaramente verificata. Per $x \neq 0$ si ha:

$$\mathrm{f(-x)} = \frac{sen(-x)}{-x} = \frac{-sen(x)}{-x} = \frac{sen(x)}{x} = f(x), \quad c.v.d.$$

Dimostriamo che la funzione è derivabile in $x = 0$. In tale punto la funzione è chiaramente continua, essendo, in base ad un limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 = f(0)$$

Dimostriamo che la funzione è derivabile in $x = 0$ applicando la definizione di derivata:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{sen(h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(h) - h}{h^2}$$

Per calcolare tale limite possiamo utilizzare la formula di Taylor, secondo cui, per $h \to 0$ risulta: $sen(h) = h - \frac{h^3}{3!} + o(h^3)$, dove $o(h^3)$ indica un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h^3, quindi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(h) - h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{h - \frac{h^3}{3!} + o(h^3) - h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{h^3}{3!}}{h^2} = 0 = f'(0)$$

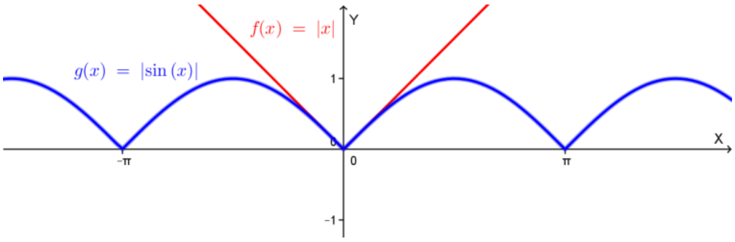
Allo stesso risultato si può arrivare utilizzando la regola di de l'Hôpital, di cui sono soddisfatte le condizioni:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(h) - h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{2h} = -\frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{(1 - \cos(h))(1 + \cos(h))}{h(1 + \cos(h))} = -\frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{sen^2(h)}{h \cdot 2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{sen^2(h)}{h^2}\cdot h = -\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(h)}{h}\right)^2\cdot h = -\frac{1}{4}\cdot\lim_{h\to 0}1\cdot h = 0$$

Dimostriamo che la funzione f ha un massimo assoluto in $\mathrm{x} = 0$.

Risulta $\left|\frac{sen(x)}{x}\right| \le 1$ infatti, come si può notare dal grafico seguente, è $|sen(x)| \le |x|$



Siccome per x=0 la funzione vale 1, possiamo concludere che la funzione ha il massimo assoluto (che vale 1) per x=0.

2)

Traccia, in uno stesso diagramma, i grafici indicativi delle tre funzioni

$$y = f(x) \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y = -\frac{1}{x}$$

e mostra che il grafico di f è tangente agli altri due in infiniti punti. È vero che tali punti di tangenza sono anche massimi o minimi relativi della funzione f?

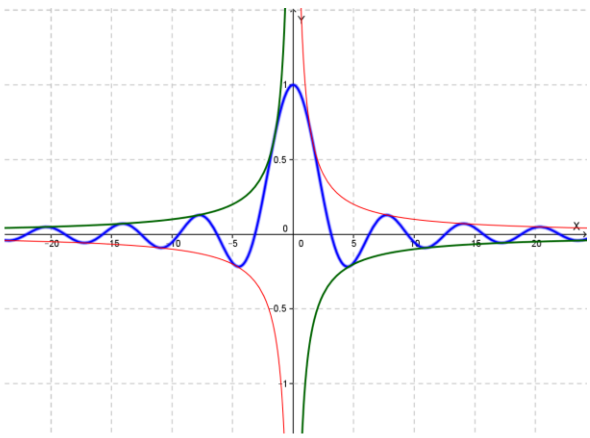
Essendo $-1 \le sen(x) \le 1$ risulta:

$$-\frac{1}{x} \le \frac{sen(x)}{x} \le \frac{1}{x} \quad \text{se x>0} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \le \frac{sen(x)}{x} \le -\frac{1}{x} \quad \text{se x<0}$$

In particolare, per x>0, risulta $\frac{sen(x)}{x} = \frac{1}{x}$ quando $sen(x) = 1$ cioè per $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ con n intero ≥ 0.

Risulta invece, sempre per x>0, $\frac{sen(x)}{x} = -\frac{1}{x}$ quando $sen(x) = -1$ cioè per $x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ con n intero ≥ 0.

Quanto detto permette di concludere che il grafico di f è tangente in infiniti punti ai grafici delle altre due funzioni:



Notiamo esplicitamente che la f si annulla quando $sen(x) = 0$, quindi se $x = n\pi$ con n intero relativo non nullo ($x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$); inoltre, per il teorema del confronto, risulta;
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{sen(x)}{x} = 0$.

I punti di tangenza NON sono punti di massimo o minimo relativo per la funzione f.

La funzione f è infatti ovunque derivabile, quindi nei punti di massimo o minimo relativi la derivata si deve annullare; essendo i punti in questione i punti di tangenza con i grafici delle funzioni $y = \frac{1}{x}$ $y = -\frac{1}{x}$, si dovrebbe annullare anche la derivata di queste funzioni, cosa che non si verifica mai (le due derivate sono rispettivamente $-\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^2}$).
Si può anche osservare che la derivata della funzione f è:

$$f'(x) = D\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = \frac{x\cos(x) - sen(x)}{x^2}$$

che nei punti di tangenza non si annulla, infatti:

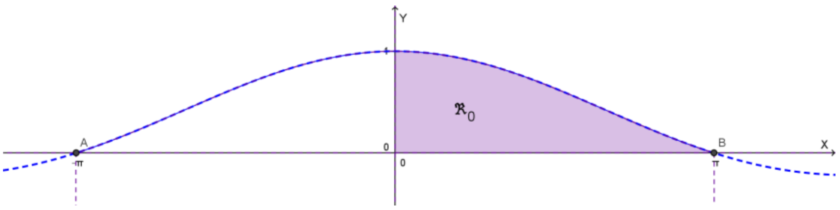
se $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ il numeratore vale -1 , se $x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ il numeratore vale 1.

3)

Detta $\Re_0$ la regione piana di area finita delimitata dal grafico di f, dall'asse x e dall'asse y, si indica con V_0 il volume del solido generato ruotando $\Re_0$ intorno all'asse y. Si indica inoltre con $\Re_n$ la regione piana delimitata dal grafico di f e dal tratto dell'asse x compreso tra $n\pi$ e $(n+1)\pi$, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, e con V_n il volume del rispettivo solido di rotazione. Dimostra che risulta:

$$V_0 = V_n = 4\pi$$

Rappresentiamo la regione $\Re_0$:

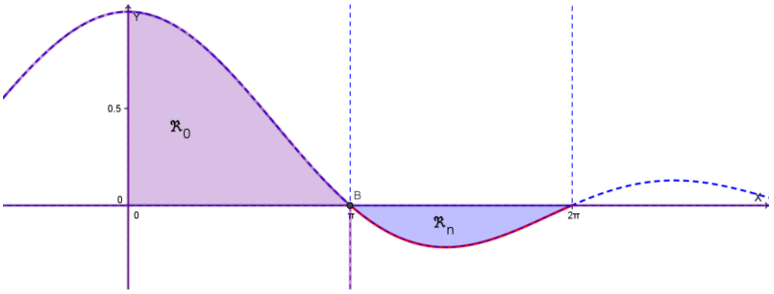


Il volume V_0 si può calcolare con il **metodo dei gusci cilindrici** (si veda il seguente approfondimento:
http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf):

$$V_0 = \int_0^{\pi} (2\pi x) f(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \frac{sen(x)}{x}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi} sen(x) dx = 2\pi[-\cos(x)]_0^{\pi} = 2\pi(1+1)$$

Quindi: $V_0 = 4\pi$.

Calcoliamo ora in modo analogo $\mathrm{V_n}$ dopo aver notato che $\mathrm{n\pi}$ e $(\mathrm{n}+1)\mathrm{\pi}$ sono due zeri della f consecutivi (per esempio $\pi\ e\ 2\pi, 2\pi\ e\ 3\pi, \ldots$):



$$V_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (2\pi x) f(x) dx \right| = 2\pi \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} x \cdot \frac{sen(x)}{x}\ dx \right| = 2\pi \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} sen(x) dx \right| =$$

$$= 2\pi \left| [-\cos(x)]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \right| = 2\pi(1+1) = 4\pi$$

(osserviamo che se n è pari $[-\cos(x)]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2$ mentre se n è dispari è uguale a -2).

Quindi: $V_n = V_0 = 4\pi$.

4)

Sia definita la funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$$

traccia un grafico indicativo dell'andamento della funzione F, individuandone, in particolare, le ascisse dei punti di massimo e di minimo (Nota: la primitiva della funzione f non è esprimibile tramite le usuali funzioni analitiche).

Osserviamo che essendo f(x) pari funzione F(x) è dispari; infatti, per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta $F'(x) = f(x)$, quindi $F'(x)$ è pari, ne segue che F(x) è dispari (ricordiamo che se una funzione è pari la sua derivata è dispari e viceversa).

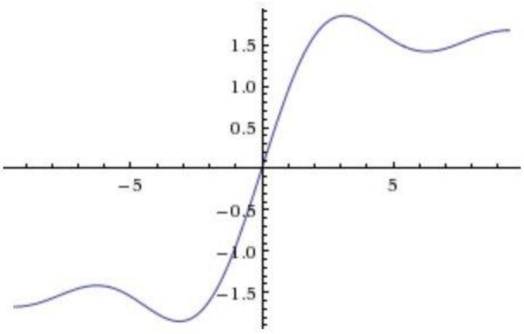
Studiamo quindi $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ per $x \geq 0$.
Si tratta di una funzione continua e derivabile in tutto il suo dominio ed è F(0)=0; inoltre, essendo $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$, abbiamo l'asintoto orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$ (e di

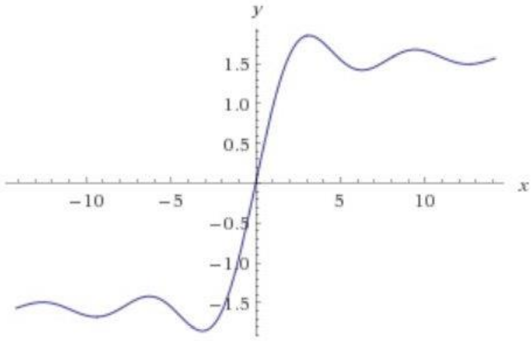
conseguenza l'asintoto $y=-\frac{\pi}{2}$ per $x \to -\infty$). Osservando le aree delle regioni $\Re_0$, $\Re_1$, ecc. (oppure pensando che $F'(x)=f(x)$ quindi la F cresce dove f è positiva e decresce dove f è negativa) possiamo dire che la funzione cresce da 0 a π, decresce da π a 2π, cresce da $2\pi\ a\ 3\pi$ e così via. In generale:

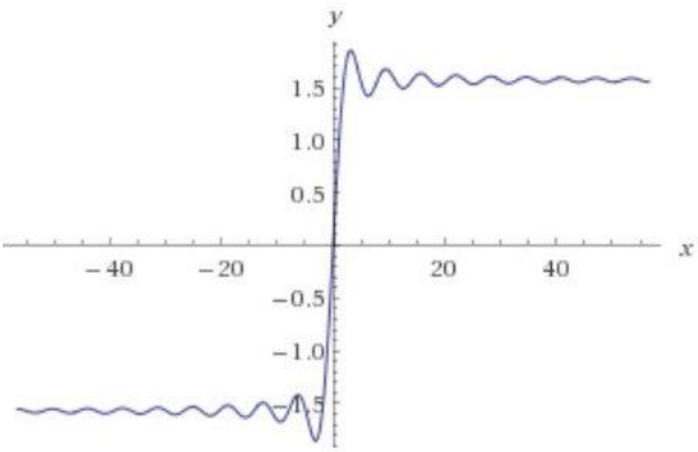
F è crescente se $n\pi < x < (n+1)\pi$ per n pari
F è decrescente crescente se $n\pi < x < (n+1)\pi$ per n dispari

Pertanto (per x>0) abbiamo dei punti di massimo relativi per $x = n\pi$ con n dispari $(\pi\ , 3\pi, 5\pi, ecc.)$ e dei punti di minimo relativo per $x = n\pi$ con n pari non nullo $(2\pi\ , 4\pi, 6\pi, ecc.)$.

Grafici qualitativi di F (su intervalli via via crescenti):







Con la collaborazione di Angela Santamaria