SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2016 - PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

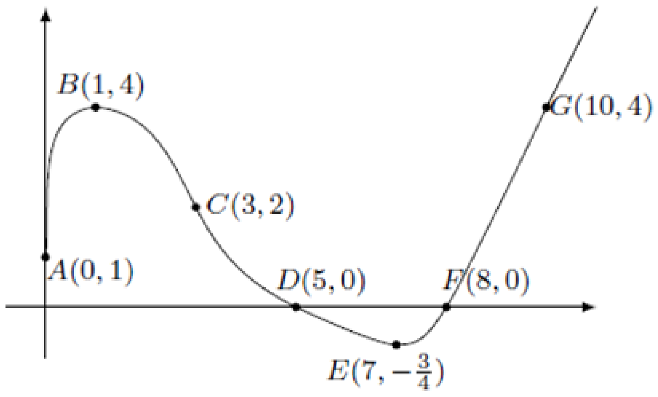


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione 2x + y − 8 = 0.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1)

In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x), \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

Studio della funzione $\mathbf{y = f'(x)}$

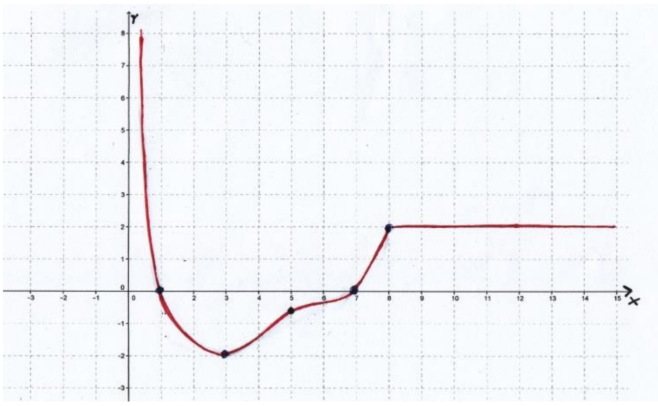
La funzione è definita in $]0, +\infty)$, si annulla per x=1 e per x=7, è positiva dove f è crescente, quindi per $0 < x < 1 \ \ e \ \ x > 7$, negativa in $1 < x < 7$.
I limiti alla frontiera sono:
$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = m$ dove m è il coefficiente angolare della retta FG, che è uguale a 2; quindi $f'(x)$ ha un asintoto orizzontale per x che tende a più infinito (in

realtà per x>8 il grafico è una retta orizzontale, y=2).

Studiamo la monotonia: $f'(x)$ cresce dove la sua derivata, cioè $f''(x)$ è positiva, quindi, guardando la concavità del grafico di f, cresce per $3 < x < 8$; $f'(x)$ decresce per $0 < x < 3$, è costante (ed uguale a 2) per x>8. La funzione ha quindi un minimo per x=3 con ordinata $f'(3) = -2$ (coefficiente angolare della tangente in C).

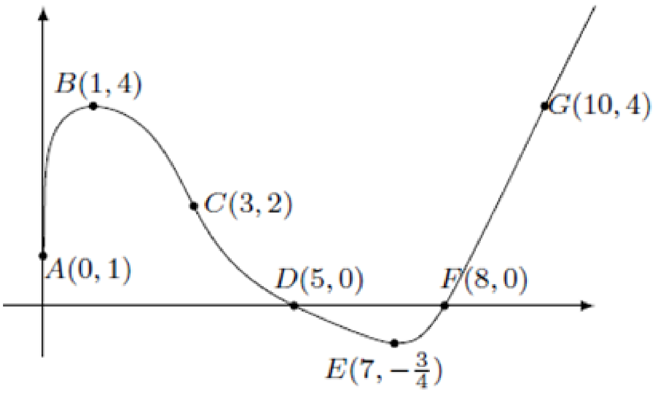
Dalle altre informazioni deduciamo che $f'(5) = -\frac{1}{2}$ (coefficiente angolare della data tangente in D).

Il grafico qualitativo di $y = f'(x)$ è il seguente:



Studio della funzione y $= F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Riportiamo per comodità il grafico della f.



Osserviamo che, per il teorema di Torricelli, F(x) è continua in $[0, +\infty)$ e derivabile, con derivata $F'(x) = f(x)$. Si tratta di dedurre quindi dal grafico della derivata di una funzione il grafico della funzione.

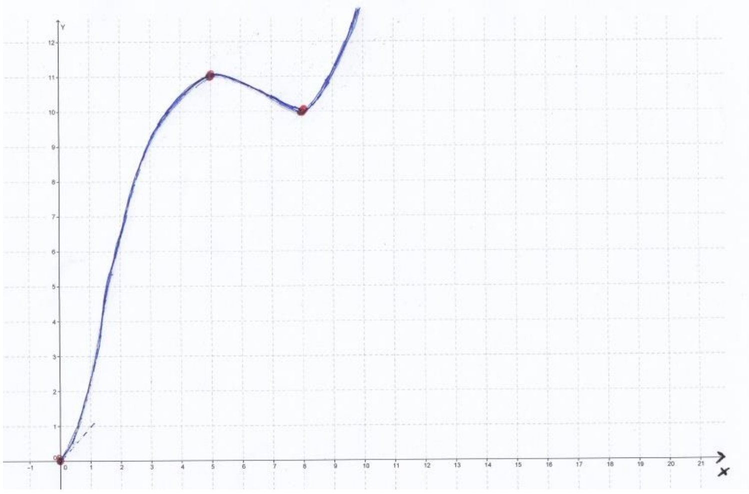
Dalle informazioni date e seguendo l'andamento dell'area compresa fra il grafico di f e l'asse delle x possiamo dedurre che:

F è positiva da 0 a 5 e cresce dal valore 0 al valore 11. Da 5 a 8 decresce, passando dal valore 11 al valore 11-1=10. Da 8 in poi cresce andando a più infinito. Quindi x=5 è punto di massimo relativo con ordinata 11 (punto a tangente orizzontale y=11); x=8 è punto di minimo relativo con ordinata 10 (punto a tangente orizzontale y=10).

Notiamo anche che dal grafico di f si può dedurre che $F'(0) = f(0) = 1$, quindi il grafico di F ha in x=0 tangente con coefficiente angolare 1.

La derivata prima di F è f, quindi la sua derivata seconda è f'. Dall'analisi precedente sul grafico di f' possiamo quindi dedurre che $F'' = f' > 0\ se\ 0 < x < 1\ e\ x > 7$: in tali intervalli quindi il grafico di F volge la concavità verso l'alto, nella parte rimanente del suo dominio verso il basso: x=1 e x=7 sono quindi punti di flesso per F.

Il grafico qualitativo di $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è il seguente:



Calcoliamo ora i valori di $f'(3)$ *ed* $f'(5)$

Risulta $f'(3) = -2 \quad ed \quad f'(5) = -\frac{1}{2}$ come già detto e motivato nello studio del grafico della derivata di f.

2)

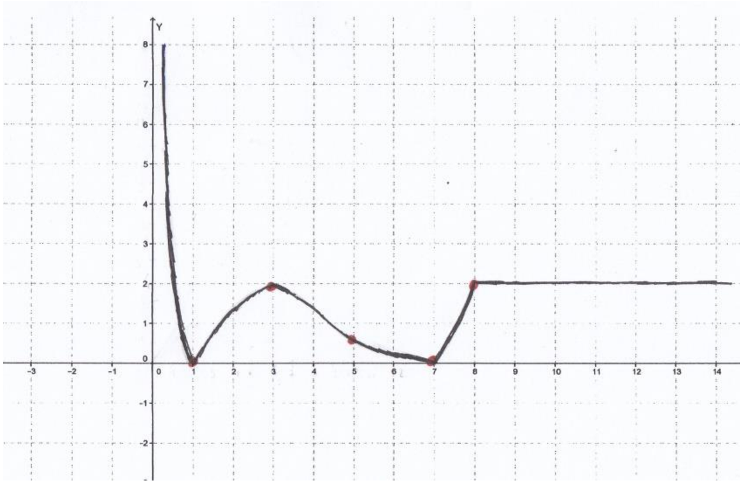
Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)| \quad , \quad y = |f(x)|' \; , \quad y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

Studio della funzione $y = |f'(x)|$

Il grafico di tale funzione si ottiene da quello di $y = f'(x)$ confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa. Il suo insieme di definizione coincide con quello di $f'(x)$: $0 < x < +\infty$. Il suo grafico qualitativo è il seguente:



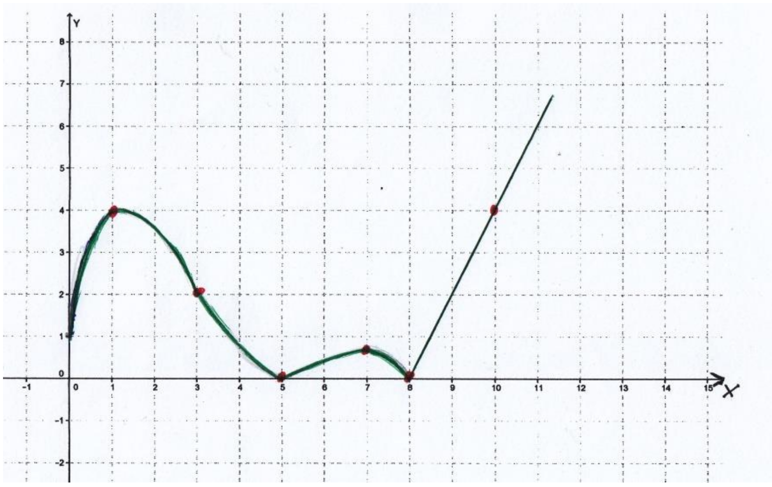
Studio della funzione $\boldsymbol{y = |f(x)|'}$

Osserviamo che: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \ se\ f(x) \geq 0:\ 0 \leq x \leq 5\,,\ x \geq 8 \\ -f(x), \ se\ f(x) < 0:\ 5 < x < 8 \end{cases}$

Notiamo poi che in x=0 risulta f(x)=1 ed f non è derivabile; inoltre, se pensiamo al grafico di $|f(x)|$ scopriremo che x=5 e x=8 sono punti angolosi .

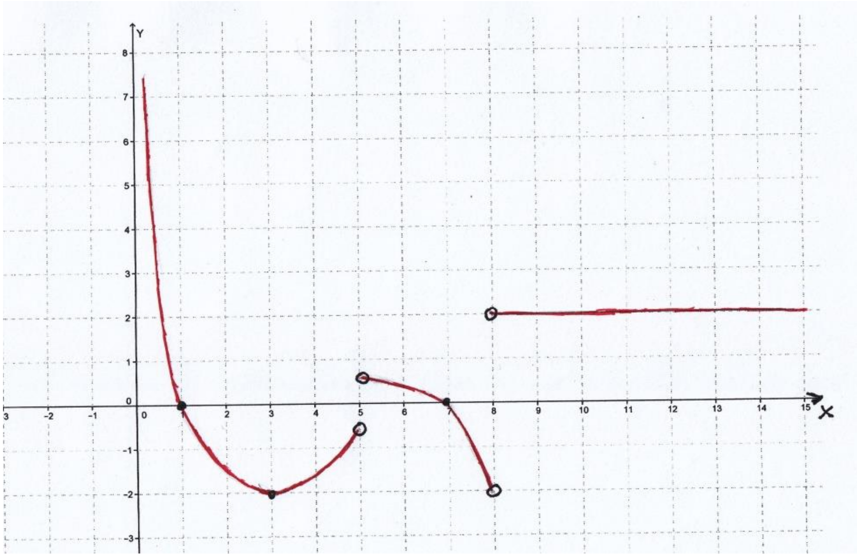
La funzione è quindi definita per $0 < x < 5\,, 5 < x < 8\,, x > 8$

Per il grafico conviene rappresentare prima la funzione $y = |f(x)|$ (confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa).



Da questo grafico si deduce il grafico della derivata operando come fatto precedentemente per dedurre dal grafico di f quello di f' (nel tratto tra 5 e 8 basta ribaltare rispetto all'asse x il grafico di f').

Il grafico qualitativo è il seguente:



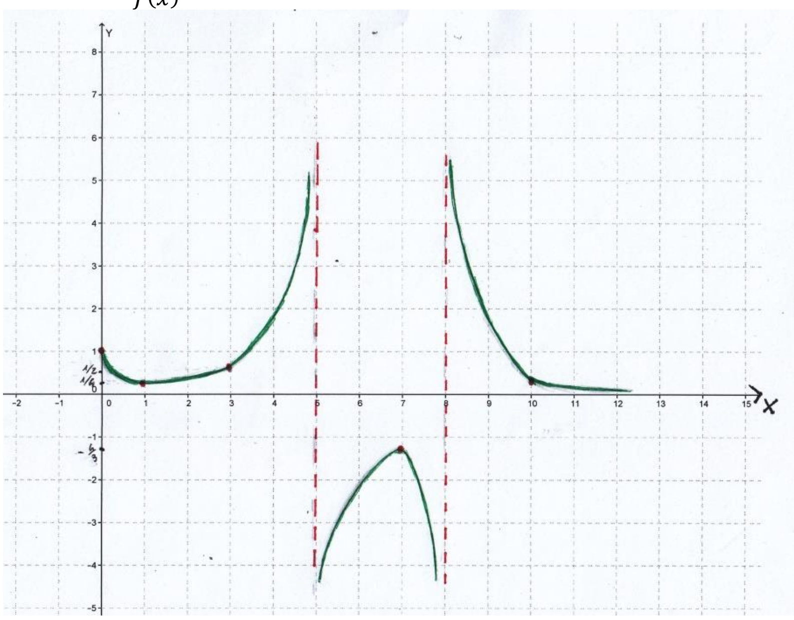
Studio della funzione $y = \frac{1}{f(x)}$

Questa funzione ha l'insieme di definizione della f privata dei punti in cui si annulla, quindi:

$0 \leq x < 5\,, \qquad 5 < x < 8, \qquad 8 < x < +\infty$

Il segno è lo stesso di quello della f. La funzione non si annulla mai; x=5 e x=8 sono asintoti verticali. La funzione cresce dove f decresce e decresce dove f cresce. Dove f è massima 1/f è minima e dove f è minima 1/f è massima. Il minimo (relativo) di 1/f è $1/4$ ed il massimo (relativo) $-4/3$.

Grafico qualitativo di $y = \frac{1}{f(x)}$



3)

Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0,8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1,7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9,10].

Valor medio di $\mathbf{y = f(x)}$ in [0; 8]:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{\int_0^8 f(x)dx}{8} = \frac{1}{8}\cdot F(8) = \frac{10}{8} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

Valor medio di $\mathbf{y = |f(x)|}$ in [0; 8]:

$$\frac{\int_0^8 |f(x)|dx}{8} = \frac{11+1}{8} = \frac{12}{8} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

(notiamo che 12 è l'area compresa fra il grafico di $y = |f(x)|$ e l'asse x da 0 e 8)

Valor medio di $\mathbf{y = f'(x)}$ in [1; 7]:

$$\frac{\int_a^b f'(x)dx}{b-a} = \frac{\int_1^7 f'(x)dx}{6} = \frac{f(7)-f(1)}{6} = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\mathbf{\frac{19}{24}}$$

Valor medio di $\mathbf{y = F(x)}$ in [9; 10]:

$$\frac{\int_a^b F(x)dx}{b-a} = \frac{\int_9^{10} F(x)dx}{1} = \int_9^{10} F(x)dx$$

Ricordiamo che $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e che $F(8) = 11 - 1 = 10$; inoltre per $x > 8$ la funzione f è la retta passante per (8; 0) e (10; 4), quindi ha equazione: $y = 2(x-8)$.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x f(t)dt = F(8) + \int_8^x 2(t-8)dt = 10 + 2\left[\frac{t^2}{2} - 8t\right]_8^x =$$

$$= 10 + 2\left[\frac{1}{2}x^2 - 8x - (32-64)\right] = x^2 - 16x + 74$$

Pertanto:

$$\int_9^{10} F(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x\right]_9^{10} = \frac{37}{3} = valor\ medio\ di\ F(X)\ in\ [9;10]$$

4)

Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Tangente nel punto di ascissa x=0.

$y - F(0) = F'(0)(x - 0)$; risulta $F(0) = 0$ ed $F'(0) = f(0) = 1$. Quindi la tangente ha equazione:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 0),\ \ y = x$

Tangente nel punto di ascissa x=8.

$y - F(8) = F'(8)(x - 8)$; risulta $F(8) = \int_0^8 f(t)dt = 11 - 1 = 10$ ed $F'(8) = f(8) = 0$. Quindi la tangente ha equazione:

$y - 10 = 0 \cdot (x - 8),\ \ y = 10$, come già detto nello studio della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Con la collaborazione di Angela Santamaria