COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2016 - QUESTIONARIO

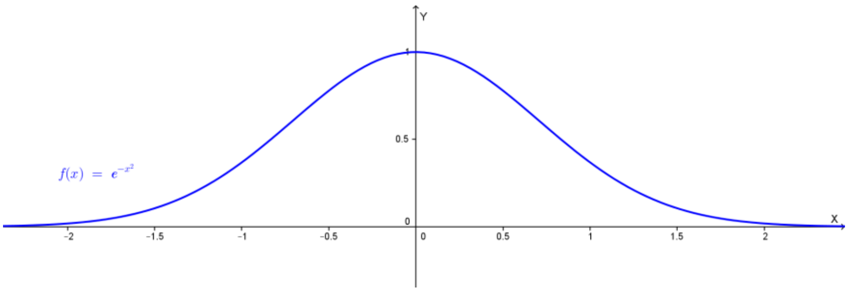
QUESITO 1

È noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Stabilire se il numero reale u, *tale che* $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$, *è positivo o negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:*

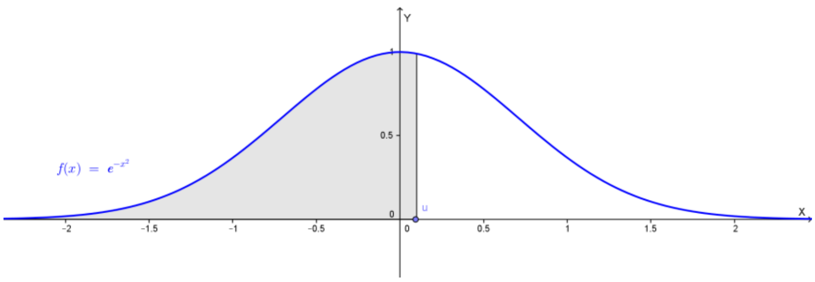
$$A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx \qquad B = \int_{-u}^{u} e^{-x^2} dx \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è pari e positiva ed il suo grafico è del tipo:



Il valore dell'integrale fornito è uguale all'area compresa fra il grafico della funzione e l'asse delle x.

Dalla simmetria del grafico deduciamo che $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$. Quindi, essendo $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2} dx = 1$, deve essere $u > 0$:



Per calcolare l'integrale A osserviamo che la funzione integranda è dispari, quindi, l'integrale è nullo: $A = \int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$.

Calcoliamo l'integrale B:

$$B=\int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx=2\int_{0}^{u} e^{-x^2}dx=2\left(\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx-\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx\right)=2\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=2-\sqrt{\pi}=B$$

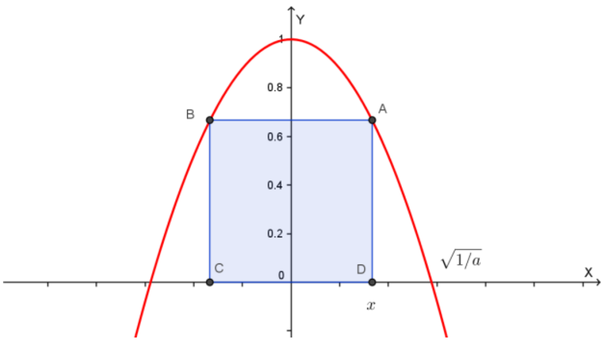
Calcoliamo l'integrale C. Effettuando la sostituzione $\sqrt{5}x=t$ otteniamo $\sqrt{5}dx=dt$, quindi (notato che se $x\to\pm\infty$ anche $t\to\pm\infty$):

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx=C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{5}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{\pi}{5}}=C$$

QUESITO 2

Data una parabola di equazione $y=1-ax^2$, $con\ a>0$ *si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse* x, *nel segmento parabolico delimitato dall'asse* x. *Determinare* a *in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.*

La parabola ha il seguente grafico:



Indicata con x l'ascissa del vertice A del rettangolo appartenente al primo quadrante, con

$$0\le x\le\sqrt{\frac{1}{a}}$$

risulta:

$$Area(ABCD)=2x(1-ax^2)=2x-2ax^3=A(x)$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$A'(x)=2-6ax^2\ge 0\quad se\quad x^2\le\frac{1}{3a}:\quad -\sqrt{\frac{1}{3a}}\le x\le\sqrt{\frac{1}{3a}}$$

La funzione è quindi crescente da 0 a $\sqrt{\frac{1}{3a}}$ e decrescente da $\sqrt{\frac{1}{3a}}$ fino a $\sqrt{\frac{1}{a}}$:

l'area è quindi massima se $x = \sqrt{\frac{1}{3a}}$.

Calcoliamo il perimetro del rettangolo:

$2p(ABCD) = 4x_A + 2y_A = 2(2x + 1 - ax^2)$; questa funzione è massima se lo è:

$$y = -ax^2 + 2x + 1$$

Si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si ha in corrispondenza del vertice:

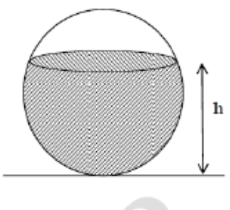
$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{a}$ (che soddisfa le limitazioni della x).

Affinché l'area ed il perimetro del rettangolo siano entrambi massimi deve essere:

$$\sqrt{\frac{1}{3a}} = \frac{1}{a}\ , \ \ da\ cui\ \ \frac{1}{3a} = \frac{1}{a^2}\ \ quindi\ \ a = 3.$$

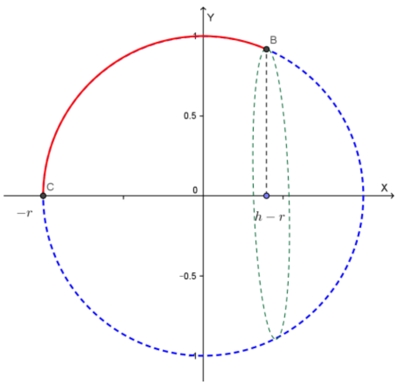
QUESITO 3

Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h.



Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:

$$V = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right).$$



Il volume richiesto si può ottenere dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$ con estremi $(-r; 0)\ e\ \ (h - r; 0)$:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_{-r}^{h-r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{h-r} (r^2 - x^2)dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{h-r} = \dots = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) = V$$

QUESITO 4

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Si tratta di una distribuzione binomiale con n=10, p=1/4 (probabilità di 1 successo, cioè di rispondere correttamente ad una domanda) e q=3/4.
La probabilità di avere almeno 8 successi equivale a:

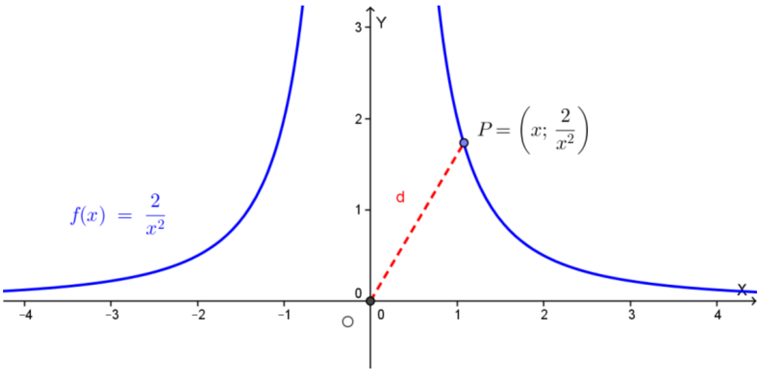
$$p = p(10,8) + p(10,9) + p(10,10) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$= \frac{436}{4^{10}} \cong 0.000416 = 0{,}042\ \% = p(x \geq 8)$$

QUESITO 5

Quali punti del grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{x^2}$ *hanno distanza minima dall'origine?*

Il generico punto P della curva ha coordinate $P = \left(x; \frac{2}{x^2}\right)$. Vista la simmetria della curva possiamo suppore x>0.



Calcoliamo la distanza tra P e l'origine O:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}}$$

Questa distanza è minima se lo è il suo quadrato, cioè la funzione di equazione:

$$y = x^2 + \frac{4}{x^4}$$

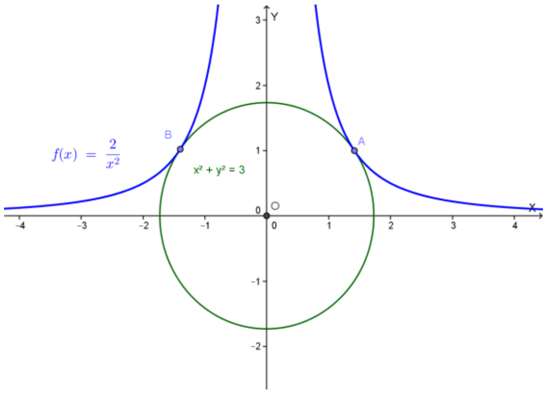
Studiamo la derivata prima (con x>0):

$y' = 2x - \frac{16}{x^5} \geq 0 \;\; se \;\; x^6 \geq 8$ da cui $x \geq \sqrt[6]{8}$, $x \geq \sqrt{2}$

La funzione è quindi crescente se $x > \sqrt{2}$ e decrescente se $0 < x < \sqrt{2}$; presenta quindi un minimo relativo (che è anche minimo assoluto) in $x = \sqrt{2}$. La corrispondente ordinata di P è 1 . La minima distanza è $\sqrt{3}$.

Esistono quindi due punti che hanno distanza minima dall'origine: $(\pm\sqrt{2}; 1)$.

Osserviamo che i punti richiesti sono i punti di tangenza della circonferenza con centro nell'origine e tangente al grafico della funzione:



N.B.

Il minimo di $x^2 + \frac{4}{x^4}$ si può determinare anche **per via elementare**, utilizzando la seguente proprietà:
"se il prodotto delle potenze di due grandezze è costante, la somma delle due grandezze è minima quando esse sono proporzionali agli esponenti. Cioè:
se $x^a \cdot y^b = k$, con a, b e k costanti reali positive, la somma $x + y$ è minima se $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ".
Nel nostro caso si ha:

$(x^2)^2 \cdot \left(\frac{4}{x^4}\right)^1 = 4$, quindi $x^2 + \frac{4}{x^4}$ è minima se $\frac{x^2}{2} = \frac{\frac{4}{x^4}}{1}$, $da\ cui: x^6 = 8\,, x = \sqrt{2}$, come trovato con il metodo delle derivate.

QUESITO 6

Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

"Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| < 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$".

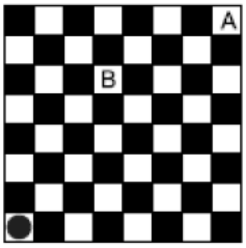
L'affermazione è falsa.

$|P(x) - \cos(x)|$ rappresenta la distanza fra i punti $A = (x; P(x))$ e $B = (x; \cos(x))$.

Osserviamo che la funzione polinomiale $y = P(x)$ è illimitata, quindi, per esempio, quando x tende a più infinito essa tende a più o meno infinito. La funzione coseno è invece limitata fra -1 e 1: la distanza AB tende quindi a più infinito e pertanto non esiste alcun polinomio per cui valga la disuguaglianza indicata PER OGNI X REALE.

QUESITO 7

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



Per raggiungere la posizione A la pedina deve spostarsi di 7 caselle a destra e di 7 in alto; i possibili percorsi sono quindi pari alle permutazioni con ripetizioni di 14 oggetti (le mosse) di cui 7 uguali fra di loro (spostamenti a destra) e altri 7 uguali fra di loro (spostamenti in alto):

$$numero\ percorsi\ possibili = \frac{14!}{7!\,7!} = 3432$$

Per raggiungere la posizione B la pedina deve spostarsi di 3 caselle a destra e di 5 in alto; i possibili percorsi sono quindi pari alle permutazioni con ripetizioni di 8 oggetti (le mosse necessarie per raggiungere B) di cui 3 uguali fra di loro (spostamenti a destra) e altri 5 uguali fra di loro (spostamenti in alto):

$$numero\ percorsi\ favorevoli\ fino\ a\ B = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

La pedina deve poi spostarsi da B ad A, poiché sono richieste 14 mosse e per far ciò deve spostarsi di 4 caselle a destra e di 2 in alto; tali spostamenti sono quindi dati da:

$$numero\ percorsi\ da\ B\ ad\ A = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

Quindi il numero dei percorsi favorevoli è dato dal prodotto $56 \cdot 15 = 840$

La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{numero\ percorsi\ favorevoli}{numero\ percorsi\ possibili} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \cong 0.2448 = 24.5\ \%$$

QUESITO 8

Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x\to 6}\frac{6-\sqrt{5x+6}}{x^2-8x+12}$$

senza adoperare la regola di de l'Hôpital.

Osserviamo che il limite presenta la forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per eliminare la forma indeterminata moltiplichiamo numeratore e denominatore per $6+\sqrt{5x+6}$ e scomponiamo il denominatore:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\left(6-\sqrt{5x+6}\right)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)}{(x-6)(x-2)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{36-(5x+6)}{(x-6)(x-2)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{-5(x-6)}{(x-6)(x-2)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{-5}{(x-2)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)}=\frac{-5}{4(12)}=-\frac{5}{48}$$

QUESITO 9

Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(2x+x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1,2e)$.

Integrando due volte per parti si ha:

$$\int e^x(2x+x^2)dx=(2x+x^2)e^x-\int(2+2x)e^x dx=$$

$$=(2x+x^2)e^x-\left[(2+2x)e^x-\int 2e^x\,dx\right]=(2x+x^2)e^x-(2+2x)e^x+2\,e^x+k=$$

$$=x^2e^x+k$$

La primitiva passante per $(1,2e)$ si ottiene ponendo: $2e=1^2e^1+k,\quad da\ cui\quad k=e$

La primitiva di $\mathrm{f(x)}$ il cui grafico passa per il punto $(1,2\mathrm{e})$ ha quindi equazione:

$$y=x^2e^x+e$$

QUESITO 10

Sia f la funzione così definita nell'intervallo $]1, +\infty)$:

$$f(x) = \int_{e}^{x^2} \frac{t}{ln\, t}\, dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

Calcoliamo l'ordinata del punto:

$$f(\sqrt{e}) = \int_{e}^{e} \frac{t}{\ln t}\, dt = 0$$

Il coefficiente angolare della tangente è dato da $f'(\sqrt{e})$. Ricordiamo la seguente proprietà sulla derivata della funzione integrale (conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale e del teorema sulla derivata della funzione composta):

Se $F(x) = \int_{a}^{g(x)} f(t)\, dt$ allora $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Nel nostro caso si ha: $f'(x) = \frac{x^2}{\ln(x^2)} \cdot 2x$, quindi: $f'(\sqrt{e}) = 2e\sqrt{e}$. La tangente ha quindi equazione:

$$y - y_0 = m(x - x_0)\,, \quad y - 0 = 2e\sqrt{e}(x - \sqrt{e})\,, \quad y = 2e\sqrt{e} \cdot x - 2e^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria