



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA

EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

1. Prova che  $f$  è una funzione pari e che essa è derivabile in  $x = 0$ . Dimostra inoltre che la funzione  $f$  ha un massimo assoluto in  $x = 0$ .
2. Traccia, in uno stesso diagramma, i grafici indicativi delle tre funzioni

$$y = f(x) \quad y = \frac{1}{x} \quad y = -\frac{1}{x}$$

e mostra che il grafico di  $f$  è tangente agli altri due in infiniti punti. È vero che tali punti di tangenza sono anche massimi o minimi relativi della funzione  $f$  ?

3. Detta  $\mathfrak{R}_0$  la regione piana di area finita delimitata dal grafico di  $f$ , dall'asse  $x$  e dall'asse  $y$ , si indica con  $V_0$  il volume del solido generato ruotando  $\mathfrak{R}_0$  intorno all'asse  $y$ . Si indica inoltre con  $\mathfrak{R}_n$  la regione piana delimitata dal grafico di  $f$  e dal tratto dell'asse  $x$  compreso tra  $n\pi$  e  $(n+1)\pi$ , qualsiasi sia  $n \in \mathbb{N}$ , e con  $V_n$  il volume del rispettivo solido di rotazione. Dimostra che risulta:

$$V_0 = V_n = 4\pi$$

4. Sia definita la funzione:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Tenuto conto del fatto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$$

traccia un grafico indicativo dell'andamento della funzione  $F$ , individuandone, in particolare, le ascisse dei punti di massimo e di minimo<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Nota: la primitiva della funzione  $f$  non è esprimibile tramite le usuali funzioni analitiche.



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA

EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

**Tema di:** MATEMATICA

**PROBLEMA 2.**

Nella figura 1 è rappresentato il grafico  $\Gamma$  della funzione continua  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $]0, +\infty)$ , e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

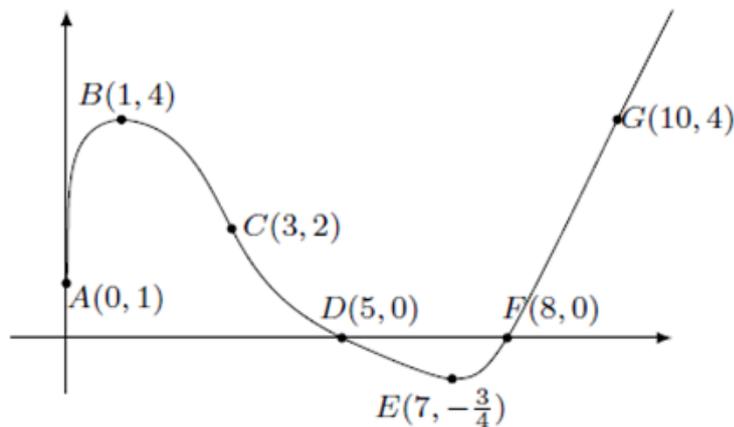


Figura 1

È noto che  $\Gamma$  è tangente all'asse  $y$  in  $A$ , che  $B$  ed  $E$  sono un punto di massimo e uno di minimo, che  $C$  è un punto di flesso con tangente di equazione  $2x + y - 8 = 0$ .

Nel punto  $D$  la retta tangente ha equazione  $x + 2y - 5 = 0$  e per  $x \geq 8$  il grafico consiste in una semiretta passante per il punto  $G$ . Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco  $ABCD$ , dall'asse  $x$  e dall'asse  $y$  vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco  $DEF$  e dall'asse  $x$  vale 1.

- In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Quali sono i valori di  $f'(3)$  e  $f'(5)$ ? Motiva la tua risposta.



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*  
**X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA

EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

**Tema di:** MATEMATICA

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di  $y = f(x)$  e di  $y = |f(x)|$  nell'intervallo  $[0,8]$ , il valore medio di  $y = f'(x)$  nell'intervallo  $[1,7]$  e il valore medio di  $y = F(x)$  nell'intervallo  $[9,10]$ .
4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione  $F(x)$  nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

**QUESTIONARIO**

1. È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale  $u$ , tale che

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$$

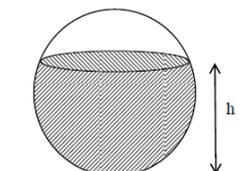
è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

2. Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse  $x$ , nel segmento parabolico delimitato dall'asse  $x$ . Determinare  $a$  in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.





*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*

3. Un recipiente sferico con raggio interno  $r$  è riempito con un liquido fino all'altezza  $h$ . Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da:  $V = \pi \cdot (rh^2 - \frac{h^3}{3})$ .

**X02Z – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Indirizzi:** LIB2 – SCIENTIFICO OPZIONE INTERNAZIONALE TEDESCA

EA10 - ESABAC - SCIENTIFICO INTERNAZIONALE FRANCESE

**Tema di:** MATEMATICA

4. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?
5. Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

“Esiste un polinomio  $P(x)$  tale che:  $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ”.

6. Calcolare il valore del limite:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - \sqrt{5x + 6}}{x^2 - 8x + 12}$$

senza adoperare la regola de l'Hôpital.

7. Data la funzione  $f(x)$  definita in  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(2x + x^2)$ , individuare la primitiva di  $f(x)$  il cui grafico passa per il punto  $(1, 2e)$ .
8. Sia  $f$  la funzione così definita nell'intervallo  $]1, +\infty[$ :

$$f(x) = \int_e^{x^2} \frac{t}{\ln t} dt$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel suo punto di ascissa  $\sqrt{e}$ .

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.