SIMULAZIONE - 10 DICEMBRE 2015 -
PROBLEMA 1: Il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa. L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe.

Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo:

1) *Scelto un riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:*

$$y = e^{(ax^2+bx+c)} + (x+d)^2 \qquad a,b,c,d \in R, x \in [0,3]$$

$$y = \frac{\sin^2(ax+b)+\cos^2(ax+b)}{cx+d} \qquad a,b,c,d \in R, x \in [0,3]$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a,b,c,d \in R, x \in [0,3]$$

La prima funzione è da scartare perché risulta sempre positiva, mentre per x=3 la funzione deve valere 0.

La seconda funzione equivale a $y = \frac{1}{cx+d}$, che non si può annullare per x=3.

La funzione che corrisponde meglio al profilo descritto è quindi $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

2) *Dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo determina i valori dei parametri a, b, c, e d in base alle dimensioni definite dall'artigiano.*

Determiniamo i valori di a, b, c e d della funzione $\mathrm{y = ax^3 + bx^2 + cx + d}$.
Considerando le misure date in dm, si ha che:

se x=0 deve essere y=0.4
se x=1 deve essere y=0.8
se x=2 deve essere y=1.2
se x=3 deve essere y=0

I valori di a, b, c e d si ottengono quindi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0.4 = d \\ 0.8 = a + b + c + d \\ 1.2 = 8a + 4b + 2c + d \\ 0 = 27a + 9b + 3c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.4 = d \\ a + b + c = 0.4 \\ 4a + 2b + c = 0.4 \\ 27a + 9b + 3c = -0.4 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la terza e la seconda equazione otteniamo:

$3a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3a$

Sostituendo nella terza equazione si ha: $c = 2a + 0.4$

Sostituendo nella quarta equazione si ha: $a = -\frac{1.6}{6} = -\frac{4}{15}$
Quindi: $b = -3a = \frac{4}{5}$, $c = 2a + 0.4 = -\frac{8}{15} + 0.4 = -\frac{2}{15}$, $d = 0.4 = \frac{2}{5}$
La funzione richiesta ha quindi equazione:

$$y = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5} = -\frac{2}{15}(2x^3 - 6x^2 + x - 3)$$

3) *studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano Oxy; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.*

La funzione da studiare è una cubica, quindi è definita su tutto R, dove è continua e derivabile. I limiti al meno infinito e al più infinito sono rispettivamente più infinito e meno infinito. Studiamo la derivata prima:

$$y' = -\frac{2}{15}(6x^2 - 12x + 1) \geq 0 \quad se \quad 6x^2 - 12x + 1 \leq 0 : \quad 1 - \frac{\sqrt{30}}{6} \leq x \leq 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Quindi la funzione è crescente se $1 - \frac{\sqrt{30}}{6} < x < 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}$ e decrescente se

$x < 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}, \ \ x > 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}$

$x = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6}$ è punto di minimo, $x = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6}$ è punto di massimo.

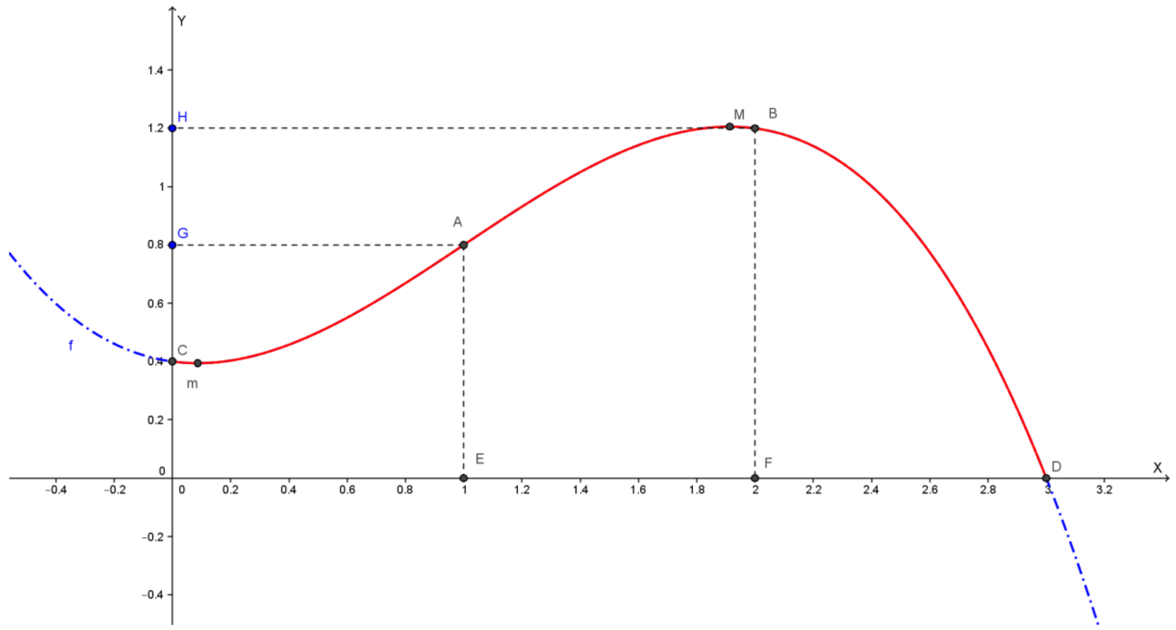
Se $x = 1 - \frac{\sqrt{30}}{6} \cong 0.09$ si ha $y = 0.39$
Se $x = 1 + \frac{\sqrt{30}}{6} \cong 1.91$ si ha $y = 1.21 < 1.4$

Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = -\frac{2}{15}(12x - 12) \geq 0 \ \ se \ \ x \leq 1$$

Il grafico quindi volge la concavità verso l'alto se x<1 e verso il basso se x>1. Abbiamo quindi (come previsto) un flesso per x=1, con ordinata (come previsto), y=0.8.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



Poiché il massimo relativo vale circa 1.21, il contenitore non può essere adoperato con una scarpa alta 1.4 dm.

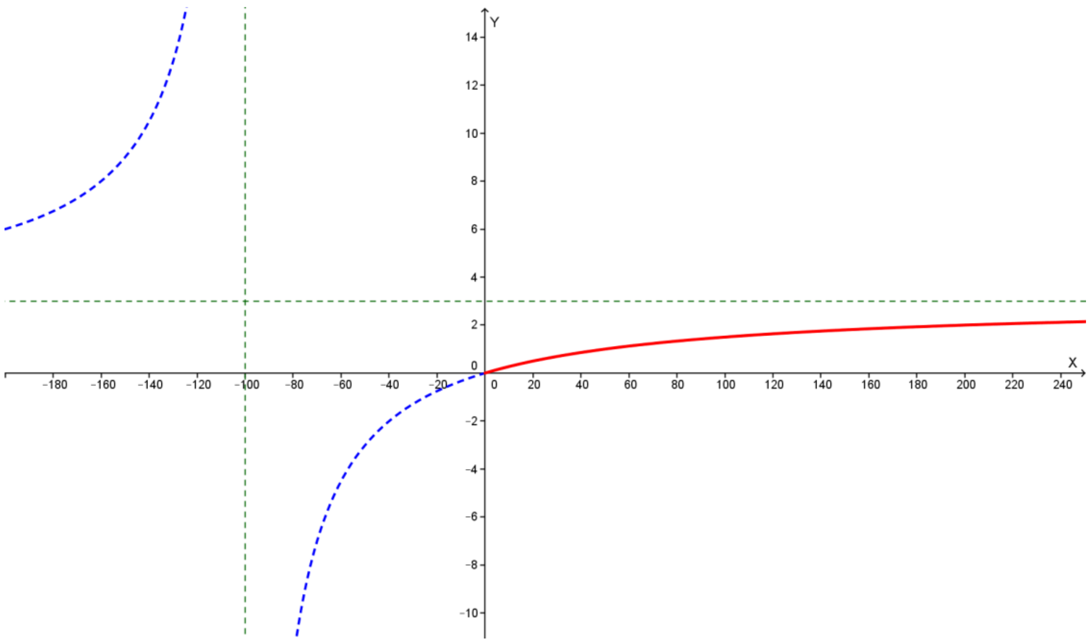
L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente.

4) *mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.*

Indicato con x il numero dei contenitori prodotti risulta (in un mese):

$$costo = 5x + 500 \qquad ricavo = 15x \qquad y = \frac{ricavo}{costo} = \frac{15x}{5x + 500} = \frac{3x}{x + 100}$$

Si tratta di una funzione omografica (iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani), di centro $(-100; 3)$, passante per l'origine. Il suo grafico è il seguente:



Si evince facilmente che il rapporto ricavo/costo tende a 3 per x che tende a più infinito.

Quindi, al crescere del numero dei contenitori prodotti in un mese, non è vero che il rapporto cresce indefinitamente, non raggiungendo neanche il valore 3, cioè il ricavo, anche per un numero elevatissimo di contenitori prodotti, è inferiore al triplo dei costi.

Con la collaborazione di Angela Santamaria