SIMULAZIONE - 10 DICEMBRE 2015 -
PROBLEMA 2: IL GHIACCIO

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume 10 dm^3*, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.*

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1) *Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente.*

Indicata con h l'altezza del parallelepipedo, il suo volume è:

$$V = b^2 h = 10\ dm^3 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{10}{b^2}$$

La superficie S del parallelepipedo è:

$$S = 2b^2 + 4(bh) = 2b^2 + 4b \cdot \frac{10}{b^2} = 2b^2 + \frac{40}{b} \qquad con\ b > 0$$

Posto per comodità S=y e b=x studiamo la funzione di equazione:

$$\boldsymbol{y = 2x^2 + \frac{40}{x}\ , \quad con\ x > 0}$$

Se $x \to 0^+$ $y \to +\infty$; se $x \to +\infty$ $y \to +\infty$; non esiste asintoto obliquo poiché la funzione è un infinito del secondo ordine.

Segno: y>0 per ogni x del dominio (x>0).

Derivata prima:

$$y' = 4x - \frac{40}{x^2} \geq 0 \quad se \quad x^3 \geq 10\ , \quad x \geq \sqrt[3]{10}$$

La funzione è quindi crescente per $x > \sqrt[3]{10}$ e decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{10}$.

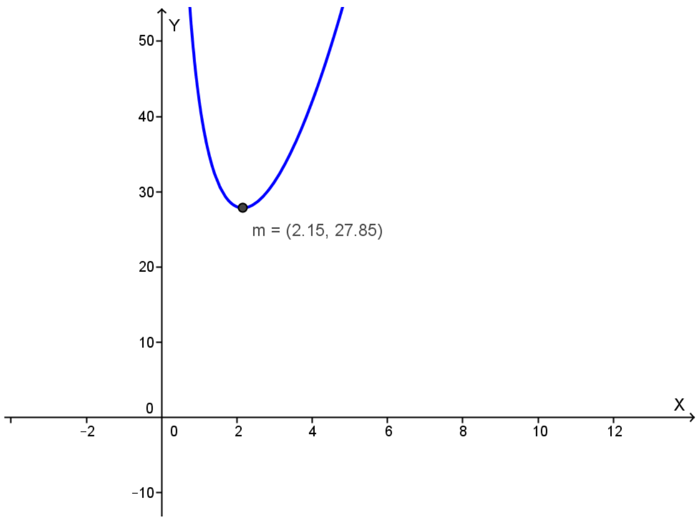
$x = \sqrt[3]{10} \cong 2.2$ è punto di minimo relativo (e assoluto), con valore:

$y = 2\sqrt[3]{100} + \frac{40}{\sqrt[3]{10}} \cong 27.8$.

Derivata seconda:

$y'' = 4 + \frac{80}{x^3} \geq 0 \quad per\ ogni\ x\ del\ dominio$: la concavità è sempre rivolta verso l'alto.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:



2) *Determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, e commenta il risultato trovato.*

Lo scambio termico è minimo quando è minima la superficie del parallelepipedo, quindi quando $b = \sqrt[3]{10} \cong 2.2\ dm$; in tal caso l'altezza h del parallelepipedo è:

$$h = \frac{10}{b^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{100}} = \frac{10\sqrt[3]{10}}{10} = \sqrt[3]{10}\ dm \cong 2.2\ dm = b$$

Il minimo scambio termico si ha quindi quando il parallelepipedo è un cubo.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C, uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente.

3) *Scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):*

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

Con i dati forniti le tre funzioni hanno le seguenti equazioni:

$$T(t) = -28\, e^{-kt}$$

$$T(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18 = 10 - 28\, e^{-kt}$$

$$T(t) = 28e^{-kt} - 10$$

Se t=0 deve essere T= - 18, quindi si scarta la prima equazione essendo T(0) = -28 e così pure la terza essendo T(0)= + 18.

La funzione richiesta è quindi la seconda:

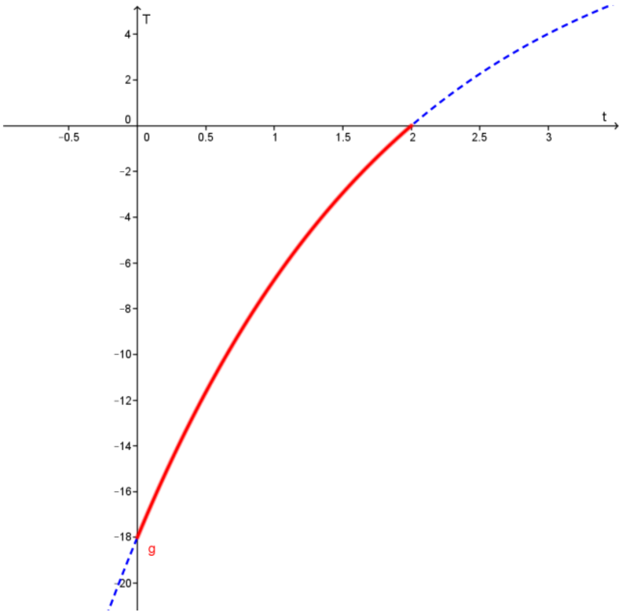
$$T(t) = 10 - 28\, e^{-kt}$$

Per determinare il valore di k dobbiamo imporre che per t=2 la temperatura non sia superiore a zero gradi:

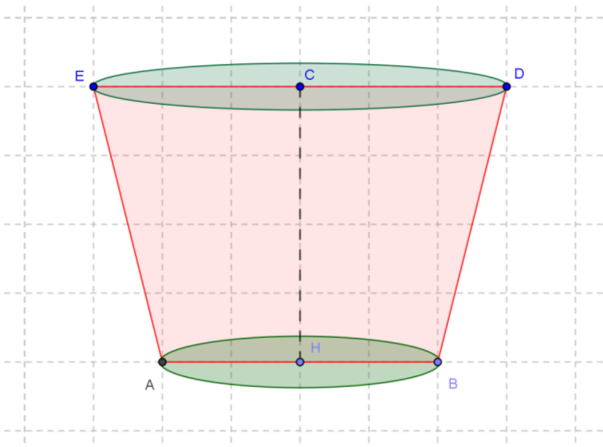
$$T(2) = 10 - 28\, e^{-2k} \le 0\,, \quad e^{-2k} \ge \frac{5}{14} \quad , \quad -2k \ge ln\left(\frac{5}{14}\right)\,, \quad k \le -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right) \cong 0.51$$

Possiamo quindi scegliere $k = -\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{5}{14}\right)$, che è circa $k = \frac{1}{2}$.
Per tale valore di k la temperatura del blocco di ghiaccio raggiunge zero gradi alla fine del percorso sul nastro trasportatore.

Anche se non richiesto, indichiamo il grafico della temperatura: $T(t) = 10 - 28\, e^{-kt}$ che approssimabile a $T(t) = 10 - 28\, e^{-\frac{1}{2}t}$.



L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm, raggio della base maggiore eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm.



4) *sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.*

Sappiamo che il volume del blocco di ghiaccio, che è un cubo di lato $b = \sqrt[3]{10}\ dm$, è:

$V(blocco\ ghiaccio) = b^3 = 10\ dm^3$

$V(recipiente) = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (1.5^2 + 1^2 + 1.5 \cdot 1) \cdot 2\ dm^3 \cong 9.948\ dm^3$

Detto V_a il volume dell'acqua necessaria per ottenere il blocco di ghiaccio, si ha:

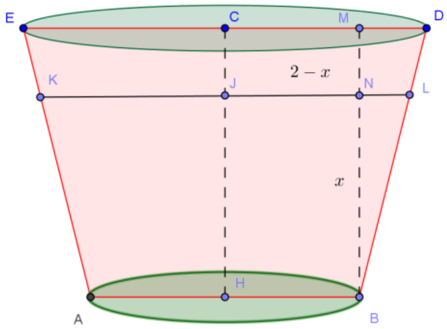
$$V_a + \frac{9.05}{100} \cdot V_a = 10\,, \qquad da\ cui: \frac{109.05}{100} V_a = 10, \quad V_a = \frac{1000}{109.05} \cong 9.170\ dm^3$$

Quindi l'acqua necessaria per ottenere il blocco di ghiaccio è di $9.170\ dm^3$, inferiore alla capacità del contenitore che è di $9.948\ dm^3$: quindi il recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto.

La differenza tra la capacità del contenitore ed il volume dell'acqua richiesta per produrre il blocco di giaccio è:

$$(9.948 - 9.170)\ dm^3 = 0.778\ dm^3$$

Dobbiamo trovare l'altezza del tronco di cono ottenuto dal recipiente riempito con $9.170\ dm^3$ di acqua. Consideriamo la seguente figura, in cui HJ=BN è l'altezza dal fondo e JL è il raggio maggiore R' del tronco di cono formato riempiendo il contenitore con $9.170\ dm^3$ di acqua:



Posto BN=x dalla similitudine fra i triangoli BMD e BNL si ottiene:

$$BM : BN = MD : NL\ ,\ 2 : x = (1.5 - 1) : (R' - 1)\,, \quad 2 : x = 0.5 : (R' - 1), \ \tfrac{1}{2}x = 2R' - 2$$

$$R' = \frac{1}{4}x + 1$$

Il volume del tronco di cono con raggi 1 ed R' ed altezza x è quindi:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot ((R')^2 + r^2 + R'r) \cdot h = \frac{1}{3}\pi \left[\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^2 + 1 + 1 + \frac{1}{4}x \right] \cdot x = 9.170$$

$$\frac{x^3}{16} + \frac{3x^2}{4} + 3x = 9.170 \cdot \frac{3}{\pi} \qquad \Rightarrow \quad x^3 + 12x^2 + 48x = 9.170 \cdot \frac{3}{\pi} \cdot 16 \cong 140.11$$

Dobbiamo quindi risolvere la seguente equazione:
$x^3 + 12x^2 + 48x - 140.11 = 0 \quad con \quad 0 < x < 2$

L'equazione può essere vista nella forma:

$(x+4)^3 - 64 - 140.11 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+4)^3 = 204.11 \quad \Rightarrow \quad x + 4 = \sqrt[3]{204.11}$

$x = \sqrt[3]{204.11} - 4 \cong 1.8878\ dm$

L'altezza dal fondo dl recipiente, con tre cifre decimali esatte, è $x = 1.888\ dm$ (approssimazione per eccesso a meno di un millesimo).

L'equazione può essere anche risolta con uno dei metodi numerici, per esempio con il metodo di bisezione.

$f(x) = x^3 + 12x^2 + 48x - 140.11 = 0 \quad con \quad 0 < x < 2$

La funzione $y = f(x)$, razionale intera, è continua e derivabile su tutto R ed essendo di grado dispari ammette almeno uno zero. Risulta:

$f(0) = -140.11, \quad f(1) = -79.11\,, \quad f(1.5) = -37.74, \quad f(1.6) = -28.49$

$f(1.7) = -18.92, \quad f(1.8) = -9.00, \quad f(1.9) = 1.27$

La funzione soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri nell'intervallo [1.8;1.9], quindi ammette almeno uno zero tra 1.8 e 1.9.

Possiamo analizzare la derivata prima della funzione per capire se la soluzione è unica nel suddetto intervallo:

$f'(x) = 3x^2 + 24x + 48 > 0, \quad x^2 + 8x + 16 > 0 \ \ (x+4)^2 > 0 \ \ per\ ogni\ x \neq -4$

La funzione è quindi sempre crescente, pertanto la soluzione è unica (non solo sul nostro intervallo).

Quindi possiamo dire che l'equazione ammette una radice compresa fra 1.8 e 1.9.

Per migliorare l'approssimazione utilizziamo il metodo di bisezione all'intervallo

[a; b]=[1.8; 1.9]

In base a quanto detto sopra per la radice c risulta: 1.8<c<1.9

Poniamo $c = \frac{1.8+1.9}{2} = 1{,}85$. Si ha f(1.85)=-3.91, quindi c sostituisce il primo estremo, in cui si ha lo stesso segno: 1.85<c<1.9.

Poniamo $c = \frac{1.85+1.9}{2} = 1{,}875$. Si ha f(1.875)=- 1.33, quindi c sostituisce il primo estremo, in cui si ha lo stesso segno: 1.875<c<1.9.

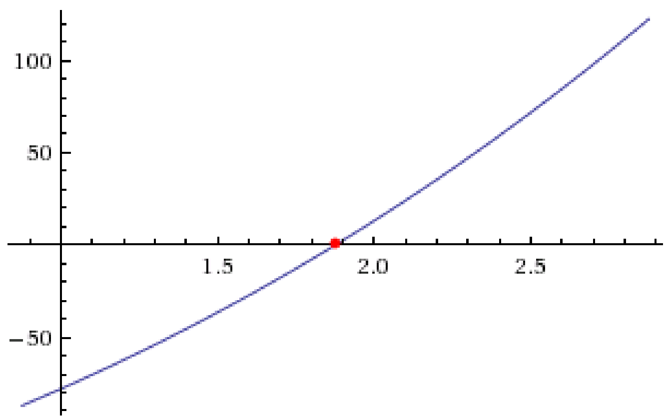
Poniamo $c = \frac{1.875+1.9}{2} = 1.8875$. Si ha f($1.8875$)=1.12, quindi c sostituisce il secondo estremo, in cui si ha lo stesso segno: 1.875<c<1.8875.

Poniamo $c = \frac{1.875+1.8875}{2} = 1.88125$. Si ha f($1.88125$)=-0.03, quindi c sostituisce il primo estremo, in cui si ha lo stesso segno: 1.88125<c<1.9.

Poniamo $c = \frac{1.88125+1.9}{2} = 1.89$. Si ha f($1.89$)=0.29, quindi c sostituisce il secondo estremo, in cui si ha lo stesso segno: 1.88<c<1.89.

Possiamo dire che la radice c è compresa fra 1.88 e 1.89.

L'altezza dal fondo dl recipiente è $x = 1.89\ dm$ a meno di un centesimo.



Con la collaborazione di Angela Santamaria