PRIMA SIMULAZIONE - 10 DICEMBRE 2015 - QUESITI

Q1

Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte?

Calcoliamo la probabilità che in un lancio di due dadi si ottenga un punteggio totale maggiore di sette (evento A).
I casi possibili nel lancio di due dadi sono 6x6=36. I casi favorevoli sono dati dalle seguenti coppie:

(2;6)
(3;5), (3;6)
(4;4), (4;5), (4;6)
(5;3), (5;4), (5;5), (5;6)
(6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)

Abbiamo quindi 15 casi favorevoli. Pertanto: $p(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}\ ;\ \ quindi\ \ \ q=1-p=\frac{7}{12}$

La probabilità p(n,x) che si verifichi l'evento A x volte in n=5 lanci (distribuzione binomiale) è:

$$p(n,x)=p(5,x)=\binom{n}{x}p^x\cdot q^{n-x}=\binom{5}{x}\left(\frac{5}{12}\right)^x\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{5-x}$$

La probabilità p che l'evento A si verifichi almeno due volte si può calcolare così:

$$p=1-\ p(5,0)-p(5,1)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{5}{12}\right)^0\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{5-0}-\binom{5}{1}\left(\frac{5}{12}\right)^1\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{5-1}=1-\left(\frac{7}{12}\right)^5-5\cdot\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^4\cong$$
$$\cong 0.691\cong 69\ \%=p$$

Q2

Considerata la parabola di equazione $y=4-x^2$ *, determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola nel punto di ascissa 2 e nel suo simmetrico rispetto all'asse di simmetria della parabola.*

Il punto di ascissa 2 è A=(2; 0). La derivata della funzione è: $y'=-2x$.

La tangente in A ha equazione: $y-0=y'(2)(x-2),\quad y=-4(x-2),\quad y=-4x+8$
Il simmetrico di A rispetto all'asse della parabola, che è l'asse y, è il punto A'=(-2; 0). La tangente in A' ha equazione: $y-0=y'(-2)(x+2),\quad y=4(x+2),\quad y=4x+8$

N.B.: la tangente in A' è la simmetrica della tangente in A rispetto all'asse y (si scambia la x in –x).

Q3

Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto [1,1,1] al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.

La perpendicolare ad un piano ha i suoi stessi parametri direttori, che sono 2, -3 ed 1. La retta richiesta ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 1t \end{cases} \quad equivalente\ a \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}, \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{1} \end{cases}, \quad \begin{cases} -3x - 2y + 5 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases},$$

Q4

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Determinare i parametri h e k in modo che f(x) sia derivabile in tutto l'intervallo [0; 4].

Per essere derivabile è necessario che sia continua; per la continuità dobbiamo analizzare il punto x=2.

$$f(2) = 8 = \lim_{x \to 2^-} f(x); \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - kx + h) = 4 - 2k + h$$

Deve essere: $4 - 2k + h = 8, da\ cui: \quad h - 2k = 4.$

La funzione è derivabile in [0; 4] se lo è in x=2.

Se x<2 si ha: $f'(x) = 3x^2$, se x>2 si ha $f'(x) = 2x - k$. Risulta:

$f'_-(2) = 12$, $f'_+(2) = 4 - k$, quindi deve essere 4-k=12, cioè k= -8; ed essendo $h - 2k = 4$ risulta h= -12.

La funzione è quindi derivabile in tutto l'intervallo [0; 4] per $h = -12\ e\ k = -8$.

Q5

Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

La funzione è definita per ogni x diverso da zero.

Poiché per x che tende a più o meno infinito la funzione tende a più o meno infinito, può esistere asintoto obliquo sia al più che al meno infinito. Inoltre risulta $f(x) \sim \frac{x}{2}\ \ per\ x \to \pm\infty$ (come dire che per x che tende a più o meno infinito $\frac{f(x)}{x} \to \frac{1}{2} = m$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}-\frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-x\cdot 2^{\frac{1}{x}}-x}{2\left(2^{\frac{1}{x}}+1\right)}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x-x\cdot 2^{\frac{1}{x}}}{4}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{4}\right] =$$

$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\right] = -\frac{1}{4}ln2 = q$ (si ricordi il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$).

L'asintoto obliquo ha quindi equazione:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}ln2$$

Q6

Risolvere la seguente equazione:

$$6\cdot\binom{x}{5} = \binom{x+2}{5}$$

Notiamo preliminarmente che deve essere x intero positivo e $x \geq 5$ (che soddisfa anche $x + 2 \geq 5$). Sviluppando i coefficienti binomiali si ha:

$$6\cdot\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!} = \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-1)(x-2)}{5!}$$

$6(x-3)(x-4) = (x+2)(x+1)$, $5x^2-45x+70 = 0$, $x^2-9x+14 = 0$, $x = 2\ e\ x = 7$. La soluzione x=2 non è accettabile, quindi:

l'equazione è soddisfatta se x=7.

Q7

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$, *dopo aver determinato il campo di esistenza ricerca l'eventuale asintoto verticale.*

La funzione è definita per x>0. Calcoliamo il limite per x che tende a zero più:

$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right] = 0$ (ricordiamo che $\lim_{x\to 0^+}x^a\ln^b x = 0 \quad per\ ogni\ a > 0\ e\ per\ ogni\ b > 0$).

La funzione non ammette quindi asintoto verticale.

Q8

Determina, utilizzando la definizione, la derivata prima della seguente funzione: $y = \sin 2x$ *e generalizza il risultato per* $y = \sin nx$ *con n € N.*

In base alla definizione di derivata risulta:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sin2(x+h)-sin(2x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sin(2x+2h)-sin(2x)}{h}$$

In base alle formule di prostaferesi si ha: $\sin p - \sin q = 2sin\frac{p-q}{2}cos\frac{p+q}{2}$
Quindi:

$$\lim_{h\to 0}\frac{sin(2x+2h)-\sin(2x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin h\, cos(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2\cdot\frac{\sin h}{h}\cdot cos(2x+h) = 2\cdot 1\cdot \cos(2x) =$$

$= 2\cos(2x)$

La derivata di $y = \sin 2x$ è $y' = 2\cos(2x)$

Generalizzando, se $y = \sin(nx)$ risulta $y' = n\cdot\cos(nx)$

Q9

Un oggetto viene lanciato verso l'alto; supponendo che $h(t) = 40t - 2t^2$ *sia la legge oraria del suo moto espressa in metri, determina la funzione velocità e la quota massima raggiunta dall'oggetto.*

Ricordiamo che la velocità è la derivata della legge oraria, quindi:

$v = h'(t) = 40 - 4t$

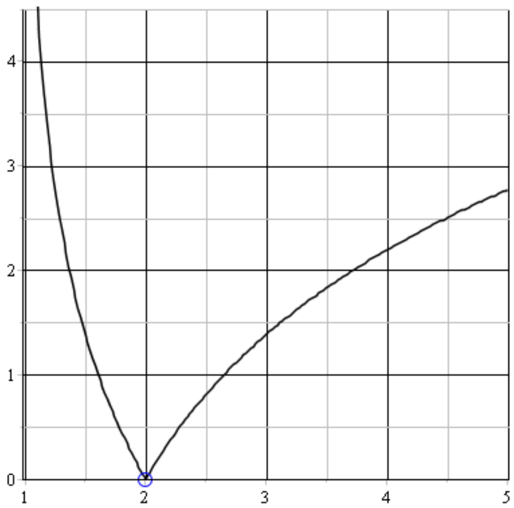
Quando un oggetto lanciato verso l'alto raggiunge la quota massima la sua velocità è nulla, quindi:

$40 - 4t = 0$, $t = 10$, $h(10) = 400 - 200 = 200$

La quota massima raggiunta dall'oggetto è di 200 m.

Q10

Analizza il grafico della funzione $y = \frac{|x-2|}{x-2}\cdot\ln(x-1)$ *e studiane i punti di discontinuità:*



Dopo aver individuato il tipo di discontinuità scrivi l'espressione della funzione che può essere ottenuta con un prolungamento per continuità.

La funzione è definita per $1 < x < 2 \quad vel \quad x > 2$

In x=1 abbiamo una discontinuità di seconda specie (il limite destro per x che tende a 1 più è più infinito).

In x=2 abbiamo una discontinuità di terza specie (detta anche eliminabile). Poiché il limite destro e sinistro per x che tende a due più e a due meno è zero, la funzione può essere prolungata con continuità nel modo seguente:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & se \ 1 < x < 2 \quad vel \quad x > 2 \\ 0 & se \quad x = 2 \end{cases}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria