SIMULAZIONE - 29 APRILE 2016 - PROBLEMA 2

Figura 1: grafico G

Il grafico G in figura 1 rappresenta una funzione del tipo:

$$f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}\,, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; k \,\epsilon\, \mathbb{N}\,, k > 1$$

1)

Determina il valore del parametro k affinché la f(x) sia rappresentata dal grafico, motivando la tua risposta. Calcola inoltre le coordinate dei punti di flesso, le equazioni degli eventuali asintoti e le equazioni delle rette tangenti a G nei punti di flesso.

Dal grafico deduciamo che:

se x=0, y=0: vero per ogni k;
se x=2, y=4: $4 = 2^k \cdot e^{k-2}$, $da\ cui\ \ 1 = 2^{k-2} \cdot e^{k-2}\,,\ 1 = (2e)^{k-2},\ k-2 = 0, k = 2$. Quindi:

$\boldsymbol{f(x) = x^2 \cdot e^{(2-x)}}$

Risulta:

$f'(x) = e^{2-x}(2x - x^2) \geq 0\ \ se\ \ 0 \leq x \leq 2$

$f''(x) = e^{2-x}(2 - 4x + x^2) \geq 0\ \ se\ \ x^2 - 4x + 2 \geq 0\text{:}\ x \leq 2 - \sqrt{2}\ \ or\ \ x \geq 2 + \sqrt{2}$

Quindi i flessi hanno ascissa $x = 2 - \sqrt{2}\ e\ \ x = 2 + \sqrt{2}$; le ordinate sono:

$x = 2 - \sqrt{2} \cong 0.6,\ \ y = f(2 - \sqrt{2}) = (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \cong 1.4$
$x = 2 + \sqrt{2} \cong 3.4,\qquad y = f(2 + \sqrt{2}) = (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \cong 2.8$

I flessi hanno quindi coordinate:

$F_1 = \left(2 - \sqrt{2};\ (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}\right),\ \ F_2 = \left(2 + \sqrt{2};\ (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}\right)$

La funzione è definita e continua su tutto l'asse reale, quindi non può avere asintoti verticali.

Se $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$: non c'è asintoto orizzontale e non può esserci asintoto obliquo perché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Se $x \to +\infty, f(x) \to 0$: c'è l'asintoto orizzontale y=0.

Cerchiamo le tangenti nei punti di flesso:

$f'(2 - \sqrt{2}) = (2\sqrt{2} - 2)e^{\sqrt{2}}$

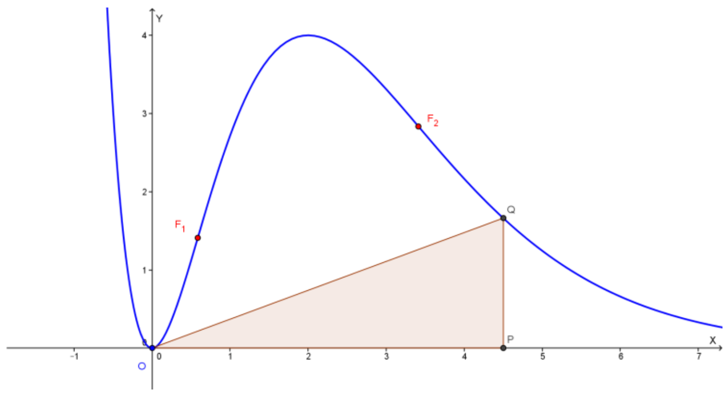
Tangente in F_1: $y - (6 - 4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2} - 2)e^{\sqrt{2}}(x - 2 + \sqrt{2})$

$f'(2 + \sqrt{2}) = (-2\sqrt{2} - 2)e^{-\sqrt{2}}$

Tangente in F_2: $y - (6 + 4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} = (-2\sqrt{2} - 2)e^{-\sqrt{2}}(x - 2 - \sqrt{2})$

2)

Considera un triangolo avente i vertici, rispettivamente, nell'origine, nel punto della funzione di ascissa a, e nel punto P sua proiezione sull'asse x. Determina il valore a ≥ 0 per cui la sua area sia massima.



$Q = (a;\ a^2 \cdot e^{(2-a)}),\quad P = (a; 0).\ Se\ a = 0\ \ Area = 0.$ In generale il triangolo OPQ ha area:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a^2 \cdot e^{(2-a)} = \frac{1}{2} a^3 \cdot e^{(2-a)}$;

$$A' = \frac{1}{2} a^2 \cdot e^{(2-a)} (3-a) \geq 0 \quad se\ a \leq 3$$

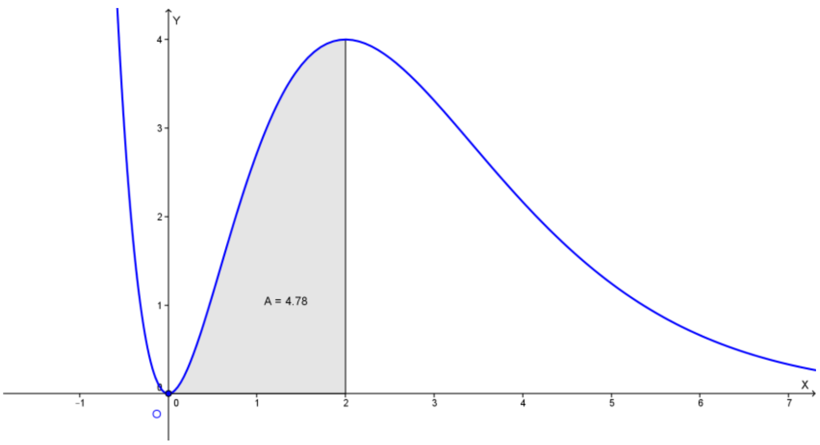
Quindi A è crescente se 0<a<3 e decrescente se a>3: a=3 è punto di massimo.

3)

Calcola l'area della regione piana delimitata da G e dall'asse x nell'intervallo [0,2] e determina il valore dell'errore percentuale che si verifica nel calcolo di tale area se nell'intervallo [0,2] si adotta, per approssimare, una funzione razionale di 3° grado della forma

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, \quad x \in \mathbb{R},\ a, b, c, d\ \in \mathbb{R}$$

$con\ \ r(0) = f(0) = 0, r(2) = f(2) = 4, r'(0) = 0, r'(2) = 0.$



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale definito::

$$Area = \int_0^2 x^2 \cdot e^{(2-x)}\, dx$$

Integrando due volte per parti si ottiene:

$$\int x^2 \cdot e^{(2-x)} dx = (-x^2 - 2x - 2) e^{(2-x)} + c$$

Quindi:

$$Area = \int_0^2 x^2 \cdot e^{(2-x)}\, dx = \left[(-x^2-2x-2)e^{(2-x)}\right]_0^2 = (2e^2-10)u^2 \cong 4.78\, u^2.$$

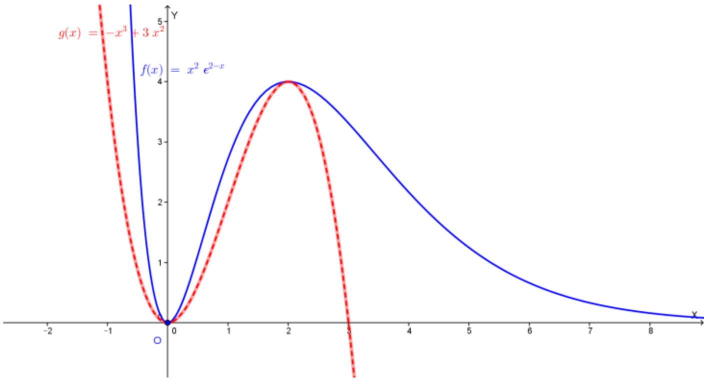
Determiniamo la funzione r(x).

r(0)=0: d=0
r(2)=4: 4=8a+4b+2c
$r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; r'(0)=0: c=0; r'(2)=0: 12a+4b=0, quindi b=-3a.

Da 4=8a+4b+2c segue: 4=8a-12a, da cui: a=-1 e quindi b=3 . Quindi:

$\boldsymbol{r(x) = -x^3 + 3x^2}$.

Graficamente si ha:



Con la funzione r(x) l'area precedente diventa:

$$Area2 = \int_0^2 (-x^3+3x^2)\, dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_0^2 = 4\, u^2$$

L'errore percentuale richiesto è dato da:

$$\frac{|Area - Area2|}{Area} \cdot 100 = \frac{4.78-4}{4.78} \cdot 100 = 16.3\ \%$$

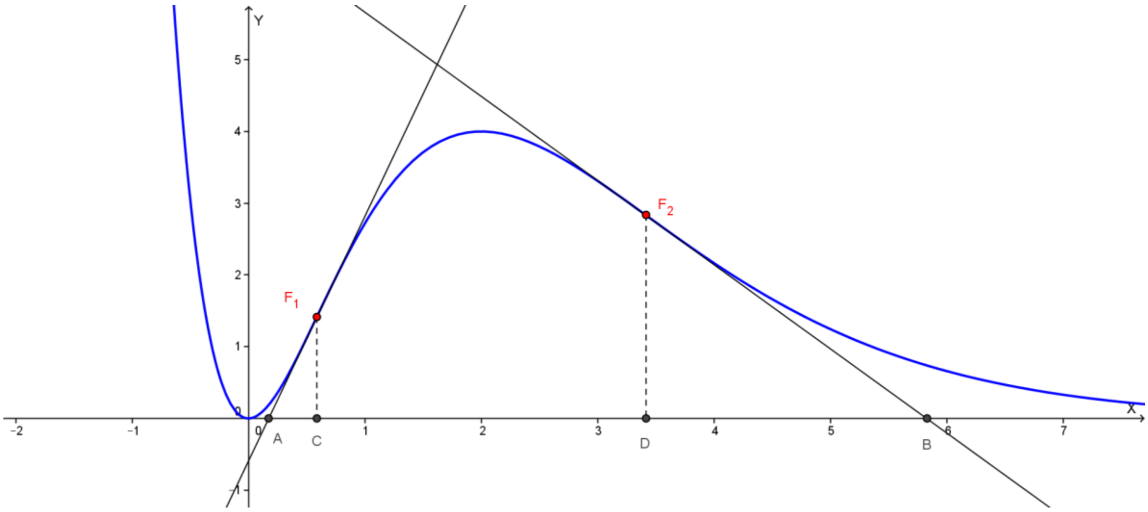
4)

Dimostra che, dette A e B le intersezioni tra le tangenti a G nei punti di flesso e l'asse x, C e D le proiezioni dei punti di flesso sull'asse x, si ha:

$$AB = 2CD\ ,$$

per qualsiasi $k \in \mathbb{N}\,, k > 1$.

Rappresentiamo graficamente la situazione proposta:



Consideriamo la funzione $f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}$ e calcoliamo i flessi con x>0 (osserviamo che per k dispari c'è anche un flesso nell'origine).

$f'(x) = x^{k-1} \cdot e^{(k-x)}(k-x)$

$f''(x) = x^{k-2} \cdot e^{(k-x)}(x^2 - 2kx + k(k-1)) \geq 0$ se $(x^2 - 2kx + k(k-1)) \geq 0$,

$x \leq k - \sqrt{k} \quad or \quad x \geq k - \sqrt{k}: \; x_C = k - \sqrt{k} \;\; e \;\; x_D = k + \sqrt{k}$ punti di flesso.

Troviamo le ordinare dei punti di flesso:

$f(x_C) = \left(k - \sqrt{k}\right)^k \cdot e^{\sqrt{k}}, \;\; f(x_D) = \left(k + \sqrt{k}\right)^k \cdot e^{-\sqrt{k}}$

Troviamo i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso:

$f'(x_C) = \left(k - \sqrt{k}\right)^{k-1} \cdot e^{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}\right), \;\; f'(x_D) = \left(k + \sqrt{k}\right)^{k-1} \cdot e^{-\sqrt{k}}\left(-\sqrt{k}\right)$

Tangente nel flesso F_1: $\quad y - f(x_C) = f'(x_C)(x - x_C)$
Per y=0 troviamo l'ascissa di A:

$$x_A = -\frac{f(x_C)}{f'(x_C)} + x_C = -\frac{\left(k - \sqrt{k}\right)^k \cdot e^{\sqrt{k}}}{\left(k - \sqrt{k}\right)^{k-1} \cdot e^{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}\right)} + k - \sqrt{k} = -\frac{k - \sqrt{k}}{\sqrt{k}} + k - \sqrt{k} =$$

$$= -\frac{k\sqrt{k} - k}{k} + k - \sqrt{k} = -\sqrt{k} + 1 + k - \sqrt{k} = 1 + k - 2\sqrt{k} = x_A$$

Tangente nel flesso F_2: $\quad y - f(x_D) = f'(x_D)(x - x_D)$

Per y=0 troviamo l'ascissa di B:

$$x_B = -\frac{f(x_D)}{f'(x_D)} + x_D = -\frac{\left(k+\sqrt{k}\right)^k \cdot e^{-\sqrt{k}}}{\left(k+\sqrt{k}\right)^{k-1} \cdot e^{-\sqrt{k}}\left(-\sqrt{k}\right)} + k + \sqrt{k} = -\frac{k+\sqrt{k}}{-\sqrt{k}} + k + \sqrt{k} =$$

$$= \frac{k\sqrt{k}+k}{k} + k + \sqrt{k} = \sqrt{k} + 1 + k + \sqrt{k} = 1 + k + 2\sqrt{k} = x_B$$

Pertanto:

$$CD = x_D - x_C = k + \sqrt{k} - k + \sqrt{k} = 2\sqrt{k}$$

$$AB = x_B - x_A = 1 + k + 2\sqrt{k} - \left(1 + k - 2\sqrt{k}\right) = 4\sqrt{k}$$

Quindi $AB = 2CD$ come volevasi dimostrare.

Con la collaborazione di Angela Santamaria