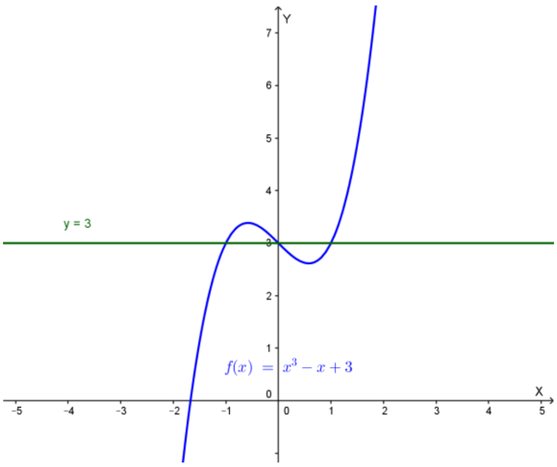
SIMULAZIONE - 29 APRILE 2016 - QUESITI

Q1

Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione y=3 della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - x + 3$ *e dalla retta stessa.*

Studiamo sommariamente la curva di equazione $y = x^3 - x + 3$, definita e continua su tutto R. Essa interseca l'asse delle ordinate in y=3.
Tende a $\pm\infty$ se x tende a $\pm\infty$; la sua derivata prima è: $y' = 3x^2 - 1 \geq 0 \ se$:
$x^2 \geq \frac{1}{3}$ quindi per $x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \ or \ x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$: in tali intervalli la funzione è crescente; quindi $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ è punto di massimo relativo e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ punto di minimo relativo.
La derivata seconda è: $y'' = 6x \geq 0 \quad se \quad x \geq 0$: x=0 è punto di flesso e, trattandosi di una cubica, il punto F=(0;3) è centro di simmetria per la curva stessa.
Notiamo che la retta e la curva dati si intersecano quando $x^3 - x = 0$, $quindi \ per$
$x = 0 \ e \ per \ x = \pm 1$.

Il suo grafico qualitativo, insieme alla retta di equazione $y = 3$ è il seguente:

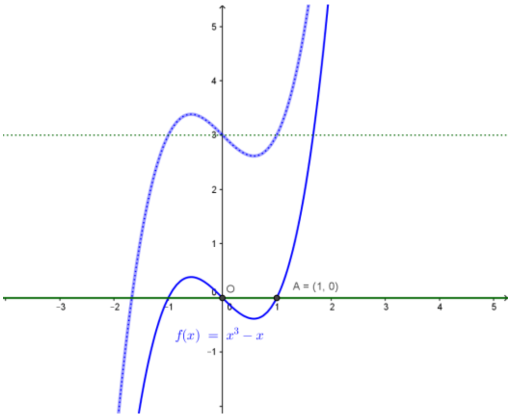


Per trovare il volume richiesto conviene effettuare la traslazione che porta la retta y=3 a coincidere con l'asse x; tale traslazione ha vettore v=(0;-3) ed equazioni:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

La retta di equazione $y = 3$ diventa $Y = 0$ e la funzione di equazione $y = x^3 - x + 3$

diventa: $Y + 3 = X^3 - X + 3 \quad da \ cui \quad Y = X^3 - X = f(X)$



In base alla simmetria ricordata prima e alle intersezioni tra le due curve, il volume richiesto è dato da:

$$V = 2\left(\pi \int_0^1 f^2(X)dX\right) = 2\pi \int_0^1 (X^3 - X)^2 dX = 2\pi \int_0^1 (X^6 - 2X^4 + X^2)\, dX =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right] = 2\pi \cdot \left(\frac{8}{105}\right) = \frac{16\pi}{105}\ u^3$$

$\cong 0.479\ u^3 \cong V$

N.B Il quesito è "quasi" uguale ad uno proposto nella prova per le Americhe del 2015 (la cubica di partenza ha equazione $y = x^3 - 3x + 3$).

Q2

Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$g(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

La funzione $f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ è discontinua per x=0 (dove non è definita); calcoliamo il limite destro ed il limite sinistro per x che tende a zero:

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 1$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 0$: i limiti sono finiti e diversi, quindi in x=0 c'è una discontinuità di prima specie, con $salto = 1 - 0 = 1$.

La funzione $f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ è discontinua per x=0 (dove non è definita); calcoliamo il limite destro ed il limite sinistro per x che tende a zero:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 0$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1} = 0$: i limiti sono finiti ed uguali, quindi in x=0 c'è una discontinuità eliminabile (terza specie). Osserviamo che il "prolungamento continuo" della funzione è:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \neq 0 \\ 0\ , & se\ x = 0 \end{cases}$$

N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Q3

Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:
a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?
b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

La probabilità di ammalarsi della popolazione in esame è $p = 0.15$; la probabilità di NON ammalarsi è $q = 1 - p = 1 - 0.15 = 0.85$.

a) Si tratta di una distribuzione binomiale e dobbiamo calcolare la probabilità che su 20 alunni ci siano un numero di alunni ammalati maggiore di due, come dire che non devono essere ammalati zero, uno o due; indicando con $p(k, n)$ la probabilità che ci siano k successi (k alunni ammalati) su n prove (n alunni in totale), la nostra probabilità è data da:

$$p(più\ di\ due\ ammalati\ su\ 20) = 1 - p(0\ ammalati) - p(1\ ammalato) - p(2\ ammalati) =$$
$$= 1 - p(0{,}20) - p(1{,}20) - p(2{,}20) = 1 - \binom{20}{0} 0.15^0 \cdot 0.85^{20} - \binom{20}{1} 0.15^1 \cdot 0.85^{19} -$$
$$- \binom{20}{2} 0.15^2 \cdot 0.85^{18} = 1 - 0.85^{20} - 20 \cdot 0.15 \cdot 0.85^{19} - 190 \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^{18} \cong$$
$$\cong 0.595 \cong 59.5\ \%$$

b) La probabilità di avere un numero di successi (ammalati) maggiore di 50 su una popolazione di 500 alunni equivale alla probabilità di NON avere 0,1,2,…,50 alunni ammalati su 500, quindi:

$$p(più\ di\ 50\ ammalati\ su\ 500) = 1 - p(0{,}500) - p(1{,}500) - p(2{,}500) - \cdots - p(50{,}500) =$$

$$= 1 - \binom{500}{0} 0.15^0 \cdot 0.85^{500} - \binom{500}{1} 0.15^1 \cdot 0.85^{499} - \cdots - \binom{500}{50} 0.15^{50} \cdot 0.85^{450} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{50} \binom{500}{k} \cdot 0.15^k \cdot 0.85^{500-k}$$

Queste sono le operazioni (molto lunghe) da compiere per verificare che la probabilità che ci siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%. Il risultato valutato al computer è pari a circa : $0.9993 = 99.93\ \%$.

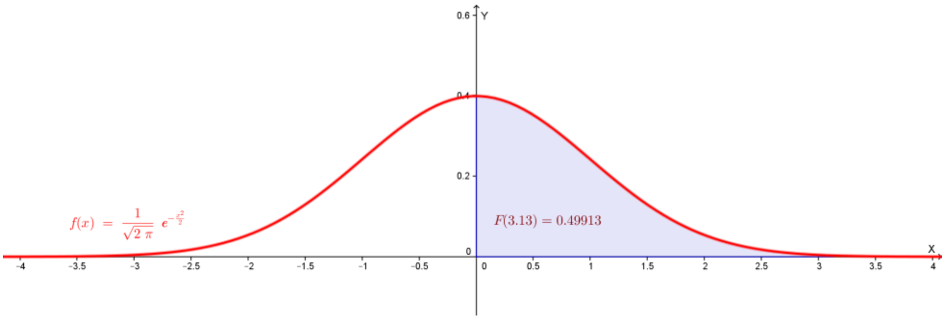
Osservazione.

Per la soluzione del punto b) si può approssimare la distribuzione binomiale con la distribuzione normale, essendo il numero n delle prove abbastanza grande ed i valori di p e q non troppo vicini a zero.
La variabile binomiale X può essere approssimata con la variabile normale standardizzata:

$T = \frac{X-m}{\sigma}$, $con \quad m = np \quad e \quad \sigma = \sqrt{npq}$. Nel nostro caso:
$m = np = 500 \cdot 0.15 = 75 \quad e \ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{75 \cdot 0.85} = \ 7.98$

Se $X = 50$ si ha $\quad T = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{50-75}{7.98} \cong \ -3.13$
Quindi:
$p(X > 50)$ si può approssimare con $p(T > -3.13)$.

Posto $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ osserviamo che $p(T > -3.13) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-3.13}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0.5 + F(3.13)$.



Dalle tavole di Sheppard (che forniscono i valori di $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$) si ricava $F(3.13) = 0.4991$ quindi:

$p(X > 50) = \ p(T > -3.13) = 0.5 + 0.4991 = 0.9991 = 99.91\ \%$ che approssima bene il valore trovato utilizzando la distribuzione binomiale.

N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Q4

Utilizzando il differenziale calcola di quanto aumenta il volume di un cono retto avente raggio di base 2 m e altezza 4 m quando il raggio di base aumenta di 2 cm.

Consideriamo il volume del cono in funzione del raggio:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi R^2 = V(R), \quad V'(R) = \frac{4}{3}\pi(2R) = \frac{8}{3}\pi R\,, \qquad R_0 = 2, \qquad \Delta R = 0.02, \qquad V'(R_0) = \frac{16}{3}\pi$$

In base alla definizione di differenziale si ha:

$$\Delta V = V(R_0 + \Delta R) - V(R_0) \cong dV = V'(R_0) \cdot \Delta R\,, \quad \Delta V = \ V'(R_0) \cdot \Delta R = \frac{16}{3}\pi \cdot 0.02 = \frac{16}{3}\pi \cdot \frac{2}{100} = \frac{8}{75}\pi \cong 0.335$$

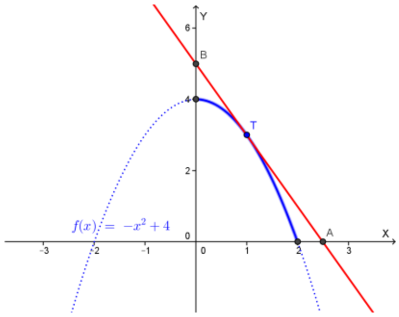
Il volume del cono aumenta di circa $0.335\ m^3$.
Il valore esatto dell'aumento di volume è:

$$\Delta V = V(R_0 + \Delta R) - V(R_0) = V(2.02) - V(2) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2.02^2 - \frac{4}{3}\pi \cdot 2^2 \cong 0.337 \ \ m^3$$

Q5

Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$ *, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.*

La parabola ha vertice nel punto (0;4) ed interseca l'asse x nei punti di ascissa -2 e 2.
Detto T il generico punto della parabola nel primo quadrante abbiamo la seguente figura:



Poniamo $T = (t; 4 - t^2)$, $con \quad 0 < t < 2$ e scriviamo l'equazione della tangente in T alla parabola; risulta: $y' = -2x$, quindi il coefficiente angolare della tangente in t è: $m = -2t$.
La tangente ha quindi equazione:

$y - (4 - t^2) = -2t(x - t)$, $\quad y = -2tx + t^2 + 4$ quindi le intersezioni con glia assi sono:

$$A \begin{cases} x = \dfrac{t^2+4}{2t} \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad B \begin{cases} x = 0 \\ y = t^2 + 4 \end{cases}$$

Il triangolo formato con gli assi cartesiani ha quindi area:

$$Area(AOB) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^2+4}{2t}\right) \cdot (t^2 + 4) = \frac{(t^2+4)^2}{4t}$$

Quest'area è minima se lo è la funzione: $z = \frac{(t^2+4)^2}{t}$.

Studiamo la derivata prima: $z' = \frac{(3t^2-4)(t^2+4)}{t^2} \geq 0 \quad se \quad (3t^2-4) \geq 0$,
$t \leq -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad or \quad t \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$; con le nostre limitazioni di t possiamo dire che $z' > 0 \quad se$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} < t < 2$: in tale intervallo la funzione è crescente; invece è decrescente se

$0 < t < \frac{2\sqrt{3}}{3}$: pertanto z (e quindi anche la nostra area) ha un minimo relativo (che è anche assoluto) per $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Il punto di tangenza che individua il triangolo di area minima è quindi:

$$T = (t; 4 - t^2) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 4 - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{8}{3}\right) = T$$

L'area minima vale:
$Area(minima) = \frac{(t^2+4)^2}{4t} = \frac{\left(\frac{4}{3}+4\right)^2}{\frac{8}{3}\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}\ u^2 \cong 6.16\ u^2$.

N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Q6

Determinare la soluzione particolare della equazione differenziale $y' - x = xy$ *, verificante la condizione iniziale* $y(0) = 2$.

L'equazione può essere scritta nella forma:

$y' = x + xy = x(1+y)$, $\quad \frac{dy}{dx} = x(1+y)$, $\quad \frac{dy}{1+y} = x\,dx \;\; (con\ y \neq -1)$

Integrando membro a membro si ha:

$\ln|1+y| = \frac{x^2}{2} + c$, $\quad |1+y| = e^{\frac{x^2}{2}+c}$, $\quad |1+y| = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, $1 + y = \pm e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

La costante e^c è positiva; possiamo quindi porre $\pm e^c = k$ con k positivo o negativo; quindi:

$y = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \qquad$ (1)

Se $y = -1$ l'equazione differenziale diventa: $0 = 0$, quindi $y = -1$ è soluzione.
La soluzione generale dell'equazione è pertanto la (1) con k positivo, negativo o nullo.
Dovendo essere $y(0) = 2$, abbiamo: $2 = k - 1$, $k = 3$.
La soluzione particolare dell'equazione differenziale è quindi:

$y = 3 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

Q7

Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & se\ 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & se\ \ 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell'intervallo [1, 6] e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

Osserviamo che la funzione è continua nell'intervallo chiuso [1;6] , infatti il limite sinistro e il limite destro nel 3 sono uguali a 2, che è anche il valore di f(3).

Il valore x in cui la funzione assume il valor medio è la soluzione dell'equazione

$$f(x) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{1}{5} \cdot \int_1^6 f(x)dx = \frac{1}{5} \cdot \left(\int_1^3 (x-1)dx + \int_3^6 (e^{x-3}+1)dx \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left\{ \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^3 + [e^{x-3} + x]_3^6 \right\} = \frac{1}{5} \cdot [2 + e^3 + 6 - (1+3)] = \frac{1}{5} \cdot (2 + e^3 + 2) = \frac{e^3+4}{5} = valor\ medio$$

Quindi:

se $1 \leq x \leq 3$: $\quad x - 1 = \frac{e^3+4}{5}$, $\quad x = \frac{e^3+9}{5} \cong 5.8 \quad non\ accettabile$

se $3 < x \leq 6$: $\quad e^{x-3} + 1 = \frac{e^3+4}{5}$, $\quad e^{x-3} = \frac{e^3-1}{5}$, $\quad x - 3 = ln\left(\frac{e^3-1}{5}\right)$,

$x = 3 + ln\left(\frac{e^3-1}{5}\right) \cong 4.3$ accettabile.

Il valore x in cui la funzione assume il valor medio è $x = 3 + ln\left(\frac{e^3-1}{5}\right) \cong 4.3$

N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Q8

Una sfera ha il raggio che aumenta al passare del tempo secondo una data funzione r(t). Calcolare il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono numericamente uguali.

La superficie sferica, al variare del raggio r(t), ha valore:

$S = 4\pi r^2(t)$

La velocità di crescita della superficie sferica è data da:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(4\pi r^2(t)) = 4\pi \cdot 2r(t) \cdot r'(t)$$

La velocita di crescita del raggio è $r'(t)$.

Le due velocità di crescita sono uguali quando:

$$4\pi \cdot 2r(t) \cdot r'(t) = r'(t)\ \ ,\ \ da\ cui:\ \ r(t) = \frac{1}{8\pi}$$

Il raggio della sfera nell'istante in cui la velocità di crescita della superficie sferica e la velocità di crescita del raggio sono uguali è pari a $r = \frac{1}{8\pi}\ u \cong 0.04\ u$.

N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Q9

In un riferimento cartesiano nello spazio Oxyz, data la retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = kt \end{cases}$$

e il piano β di equazione $x + 2y - z + 2 = 0$, determinare per quale valore di k la retta r e il piano β sono paralleli, e la distanza tra di essi.

I parametri direttori della retta sono i coefficienti del parametro t: (2,1,k).
I parametri direttori del piano sono i coefficienti di x, y e z: (1,2,-1).

La condizione di parallelismo tra una retta ed un piano afferma che la somma dei prodotti dei parametri direttori deve essere nulla, quindi:

$$(2)(1) + (1)(2) + (k)(-1) = 0\ \ da\ cui:\ 4 - k = 0,\ \ quindi\ \ k = 4.$$

La retta ed il piano sono paralleli se $k = 4$.

In tal caso la retta ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4t \end{cases}$$

La distanza di una retta da un piano ad essa parallela è uguale alla distanza di un qualsiasi punto della retta dal piano; per t=0 otteniamo il punto (1;1;0); la distanza di un punto da un piano si ottiene applicando la seguente formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 + 2 - 0 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{6}$$

N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Q10

Scrivere l'equazione della circonferenza C che ha il centro sull'asse y ed è tangente al grafico G_f di $f(x) = x^3 - 3x^2$ nel suo punto di flesso.

Il punto F di flesso della cubica (che esiste ed è unico) si ottiene annullando la derivata seconda:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6 = 0$ $\; se \;$ $x = 1$ $\; da\ cui \;$ $f(1) = 1 - 3 = -2$

Quindi il flesso ha coordinate: $F = (1; -2)$.
Calcoliamo la tangente alla cubica in F:

$m = f'(1) = 3 - 6 = -3$; quindi la tangente in F ha equazione:

$y + 2 = -3(x - 1), \quad y = -3x + 1$.

La circonferenza C ha quindi il centro sull'asse y ed è tangente alla retta $y = -3x + 1$ in $F = (1; -2)$.
Il centro della circonferenza appartiene anche alla perpendicolare alla tangente in F, cioè alla retta di equazione:

$y + 2 = \frac{1}{3}(x - 1), \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$; ponendo $x = 0$ abbiamo $y = -\frac{7}{3}$.

La circonferenza ha quindi centro nel punto di coordinate $A = \left(0; -\frac{7}{3}\right)$.

Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza del centro A da punto di tangenza F:

$$r = \sqrt{(1 - 0)^2 + \left(-2 + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{10}$$

Notiamo che il raggio della circonferenza si può anche ottenere come distanza del centro dalla tangente, quindi, utilizzando la formula:

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ con $(x_0; y_0) = A = \left(0; -\frac{7}{3}\right)$ e la retta $y = -3x + 1$ scritta nella forma

$3x + y - 1 = 0$. Risulta pertanto:

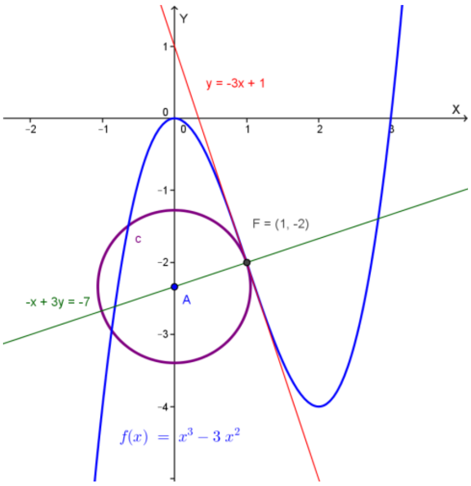
$r = \frac{\left|-\frac{7}{3}-1\right|}{\sqrt{9+1}} = \frac{\frac{10}{3}}{\sqrt{10}} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ (come nel modo precedente).

L'equazione della circonferenza è quindi:

$$(x-0)^2 + \left(y + \frac{7}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 \quad da\ cui: \quad x^2 + y^2 + \frac{14}{3}y + \frac{39}{9} = 0\,,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{14}{3}y + \frac{13}{3} = 0 : \quad 3x^2 + 3y^2 + 14y + 13 = 0\,.$$

Questa la situazione grafica (comunque non richiesta):



N.B Il quesito è stato proposto nella prova per le Americhe del 2015.

Con la collaborazione di Angela Santamaria