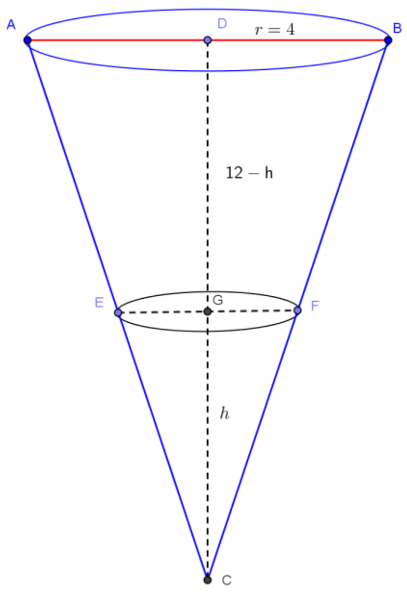
LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2016 - PROBLEMA 1

Sei addetto alla gestione di una macchina utensile in cui è presente un contenitore di olio lubrificante avente la forma di un cono circolare retto col vertice rivolto verso il basso. Il raggio di base r del cono è 4 cm mentre l'altezza h è 12 cm. In tale contenitore, inizialmente vuoto, viene versato automaticamente dell'olio lubrificante alla velocità di $12\pi\ \frac{cm^3}{s}$*. Devi assicurarti che il processo avvenga correttamente, senza produrre traboccamenti di olio.*

1)

Determina l'espressione della funzione $h(t)$*, che rappresenta il livello* h *(in cm) raggiunto dall'olio all'istante* t *(in secondi) e la velocità con la quale cresce il livello dell'olio durante il riempimento del contenitore.*



L'apotema BC del cono è: $BC = \sqrt{144+16} = 4\sqrt{10}\ cm$
Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 12 = 64\pi\ cm^3$$

Al tempo t il volume dell'olio è dato da:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot FG^2 \cdot CG$$

Posto $CG = h = h(t)$, dalla similitudine fra i triangoli BCD ed CFG risulta: $12: h = 4: FG$, $FG = \frac{h}{3}$; quindi:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot FG^2 \cdot CG = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2}{9} \cdot h = \frac{1}{27}\pi h^3$$

Poiché la velocità di versamento dell'olio è $12\pi\ \frac{cm^3}{s}$, risulta: $V(t) = (12\pi)\ t$, pertanto:

$$\frac{1}{27}\pi h^3 = (12\pi)\ t,\quad h^3 = 27 \cdot 12t,\qquad h(t) = 3\sqrt[3]{12t}$$

La velocità con cui cresce il livello dell'olio (h) durante il riempimento del contenitore è data dalla derivata di h rispetto a t:

$$h'(t) = D\left(3\sqrt[3]{12t}\right) = 3\sqrt[3]{12} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} = \sqrt[3]{\frac{12}{t^2}}$$

La velocità con cui cresce h, come prevedibile, non è costante: data la forma del contenitore, l'aumento del livello va chiaramente diminuendo al crescere di t.

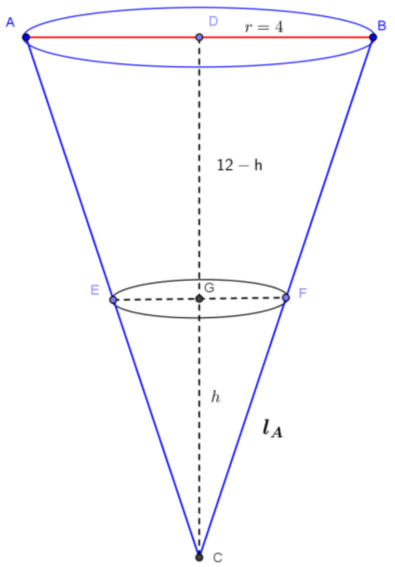
2)

Al fine di programmare il processo di versamento da parte della macchina utensile, determina il tempo t_R *necessario perché il contenitore sia riempito fino al 75% della sua altezza.*

Il 75% dell'altezza del contenitore è pari a $\frac{75}{100} \cdot 12\ cm = 9\ cm$.
Essendo $h^3 = 27 \cdot 12t$, tale altezza viene raggiunto dopo un tempo t pari a:
$t = \frac{h^3}{27 \cdot 12} = \frac{9^3}{27 \cdot 12} = \frac{9}{4} = 2.25\ (in\ secondi)$; quindi $t_R = 2.25\ s$.

3)

Devi realizzare un indicatore graduato, da porre lungo l'apotema del cono, che indichi il volume V *di olio presente nel recipiente in corrispondenza del livello raggiunto dall'olio* l_A*, misurato all'apotema. Individua l'espressione della funzione* $V(l_A)$ *da utilizzare per realizzare tale indicatore graduato.*



Dobbiamo calcolare il volume V del cono di altezza $CG = h$ in funzione dell'apotema $CF = l_A$. Risulta:

$$l_A = FC = \sqrt{FG^2 + CG^2} = \sqrt{\frac{h^2}{9} + h^2} = \frac{1}{3}h\sqrt{10}$$

$$h = \frac{3l_A}{\sqrt{10}}$$

Ma ricordiamo che

$$V(t) = \frac{1}{27}\pi h^3$$

Quindi:

$$V = \frac{1}{27}\pi h^3 = \frac{1}{27}\pi\left(\frac{3l_A}{\sqrt{10}}\right)^3 = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \cdot l_A^3$$

Quindi il volume in funzione di l_A è dato da: $V(l_A) = \frac{\pi}{10\sqrt{10}} \cdot l_A^3$.

4)

A causa di un cambiamento nell'utilizzo della macchina, ti viene richiesto di progettare un nuovo e più capiente recipiente conico, avente apotema a uguale a quello del contenitore attualmente in uso. Determina i valori di h e di r in corrispondenza dei quali il volume del cono è massimo e verifica, a parità di flusso di olio in ingresso e di tempo di riempimento t_R , a quale livello di riempimento si arriva. È ancora pari al 75% dell'altezza?

Abbiamo già visto che l'apotema del contenitore in uso è (in cm): $BC = 4\sqrt{10}$.

Dobbiamo determinare il massimo volume del cono con tale apotema. Risulta:

$h^2 + r^2 = BC^2 = 160 \;\; e \;\; V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h(160 - h^2) = massimo$ se lo è: $h(160 - h^2) = y$

Risoluzione elementare:

$y = h(160 - h^2) = (h^2)^{\frac{1}{2}}(160 - h^2) = max$ se:

$\frac{h^2}{\frac{1}{2}} = \frac{160-h^2}{1}, \;\; 2h^2 = 160 - h^2, \;\; h^2 = \frac{160}{3}$, $h = \sqrt{\frac{160}{3}}\; cm \cong 7.30\; cm$

(ricordiamo che il prodotto di due potenze con somma delle basi costante è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti).

Per tale valore di h si ottiene: $r = \sqrt{160 - h^2} = \sqrt{160 - \frac{160}{3}} = \sqrt{\frac{320}{3}}\; cm = r \cong 10.33\; cm$.

Risoluzione analitica:

$y = h(160 - h^2);$ con $0 < h < 4\sqrt{10}$

$$y' = 160 - h^2 - 2h^2 = 160 - 3h^2 \geq 0 \;\; se \quad -\sqrt{\frac{160}{3}} \leq h \leq \sqrt{\frac{160}{3}}$$

La funzione è quindi crescente per $0 < h < \sqrt{\frac{160}{3}}$ e decrescente per $\sqrt{\frac{160}{3}} < h < 4\sqrt{10}$,

risulta quindi massima per $h = \sqrt{\frac{160}{3}}\; cm \cong 7.30\; cm$, come visto con il metodo elementare.

Per tale valore di h si ottiene: $r = \sqrt{160 - h^2} = \sqrt{160 - \frac{160}{3}} = \sqrt{\frac{320}{3}}\; cm = r \cong 10.33\; cm$.

La seconda parte del quesito ci chiede il livello dell'olio raggiunto in questo nuovo contenitore dopo un tempo (in secondi) pari a $t_R = \frac{9}{4}$.

Con un ragionamento analogo a quello fatto nel punto 1 (e con riferimento alla stessa figura), abbiamo che, al tempo t il volume dell'olio è dato da:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot FG^2 \cdot CG$$

Posto $CG = h = h(t)$, dalla similitudine fra i triangoli BCD ed CFG risulta ora:

$\sqrt{\frac{160}{3}} : h = \sqrt{\frac{320}{3}} : FG$, $FG = h\sqrt{2}$; quindi:

$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot FG^2 \cdot CG = \frac{1}{3}\pi \cdot (2h^2) \cdot h = \frac{2}{3}\pi h^3$

Poiché la velocità di versamento dell'olio è ancora $12\pi \ \frac{cm^3}{s}$, risulta ancora:

$V(t) = (12\pi)\ t$, pertanto:

$\frac{2}{3}\pi h^3 = (12\pi)\ t,\ \ h^3 = 18\ t,\qquad h(t) = \sqrt[3]{18\ t}$.

Con $t = t_R = \frac{9}{4}$ otteniamo: $h(t) = \sqrt[3]{18\ t} = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} \cong 3.43$; calcoliamo il rapporto fra questo valore e quello dell'altezza del recipiente:

$\frac{\sqrt[3]{\frac{81}{2}}}{\sqrt{\frac{160}{3}}} \cong 0.47 = 47\ \%$: quindi nel primo caso dopo $t = t_R = \frac{9}{4}$ secondi il livello dell'olio raggiunge il 75% dell'altezza del recipiente, nel secondo caso il 47% dell'altezza.

Con la collaborazione di Angela Santamaria