LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2016 - PROBLEMA 2

La funzione $f: \Re \to \Re$ *è così definita:* $f(x) = sen(x) - x \cdot \cos(x)$

1)

Dimostra che f *è una funzione dispari, che per* $x \in]0, \pi]$ *si ha* $f(x) > 0$ *e che esiste un solo valore* $x_0 \in]0,2\pi]$ *tale che* $f(x_0) = 0$. *Traccia inoltre il grafico della funzione per* $x \in [0,5\pi]$.

La funzione è definita su tutto l'asse reale e risulta:

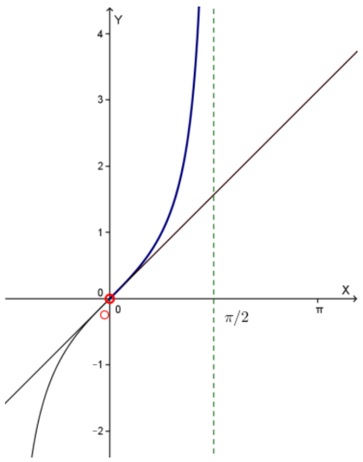
$$f(-x) = sen(-x) + x \cdot \cos(-x) = -sen(x) + x \cdot \cos(x) = -f(x)$$

Quindi la funzione è dispari.

Verifichiamo che per $0 < x \leq \pi$ si ha $f(x) > 0$.

$sen(x) - x \cdot \cos(x) > 0$

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, essendo $cos(x) > 0$ si ha: $tg(x) > x$, che è sempre verificata:



Se $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $1 > 0$ e quindi la disequazione è verificata.
Se $x = \pi$ si ha $\pi > 0$ e quindi la disequazione è verificata.
Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, essendo $sen(x) > 0$ e $xcos(x) < 0$ risulta $sen(x) - x \cdot \cos(x) > 0$

Quindi per $0 < x \leq \pi$ si ha $f(x) > 0$.

Metodo alternativo.

Consideriamo la funzione $f(x) = sen(x) - x \cdot \cos(x)$ e notiamo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ed $f(\pi) = \pi > 0$.

Analizziamo la derivata prima:

$f'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x \cdot sen(x) > 0 \;\; se \;\; x \cdot sen(x) > 0$, che è sempre verificata se $0 < x < \pi$; quindi la funzione è sempre crescente nell'intervallo $]0, \pi]$. Quanto detto permette di concludere che la funzione è sempre positiva in tale intervallo.

Dimostriamo ora che esiste un solo valore $\mathbf{x_0} \in]\mathbf{0}, \mathbf{2\pi}]$ tale che $\mathbf{f(x_0) = 0}$.

Abbiamo già verificato che $f'(x) = x \cdot sen(x)$ e risulta $x \cdot sen(x) > 0$ se $0 < x < \pi$ e $x \cdot sen(x) < 0$ se $\pi < x < 2\pi$; pertanto la funzione è crescente in $]0, \pi]$ (come già verificato) e decrescente in $]\pi, 2\,\pi[$; ma risulta $f(\pi) = \pi > 0 \;\; ed \;\; f(2\pi) = -2\pi$, quindi (essendo la funzione continua nell'intervallo $[\pi, 2\,\pi]$) essa si annulla una sola volta nell'intervallo aperto $(\pi, 2\,\pi)$; siccome in $]0, \pi]$ la funzione è sempre positiva, possiamo concludere che esiste un solo valore $x_0 \in]0,2\pi]$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dobbiamo ora tracciare, per $\mathbf{x} \in [\mathbf{0}, \mathbf{5\pi}]$, il grafico della funzione

$f(x) = sen(x) - x \cdot \cos(x)$

Per far ciò, in base a quanto già verificato, è sufficiente studiare la derivata prima e la derivata seconda, dopo aver osservato che nell'intervallo di studio la funzione è continua e che agli estremi assume i valori: $f(0) = 0 \;\; ed \;\; f(5\pi) = 5\pi$.

$f'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x \cdot sen(x) = x \cdot sen(x) > 0 \;\; se \;\; sen(x) > 0$, quindi la funzione è crescente per:

$0 < x < \pi$, $2\pi < x < 3\pi$, $4\pi < x < 5\pi$ e decrescente nella parte rimanente. Inoltre:

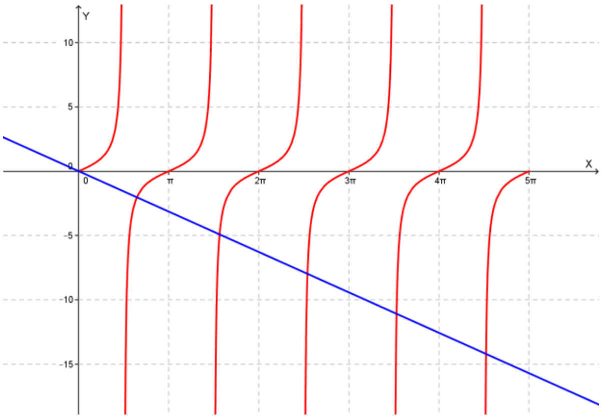
$x = 0, 2\pi, 4\pi$ sono punti di minimo relativo e $x = \pi, 3\pi, 5\pi$ sono punti di massimo relativo. Osserviamo che i massimi appartengono alla retta y=x ed i minimi alla retta y=-x.

Troviamo gli zeri della derivata seconda

$f''(x) = sen(x) + x\cos(x) = 0$; osserviamo che se $\cos(x) = 0$ dovrebbe essere $sen(x) = 0$ e ciò non può essere (il seno ed il coseno non si possono annullare contemporaneamente).

Supponiamo ora $\cos(x) \neq 0$; si ha:

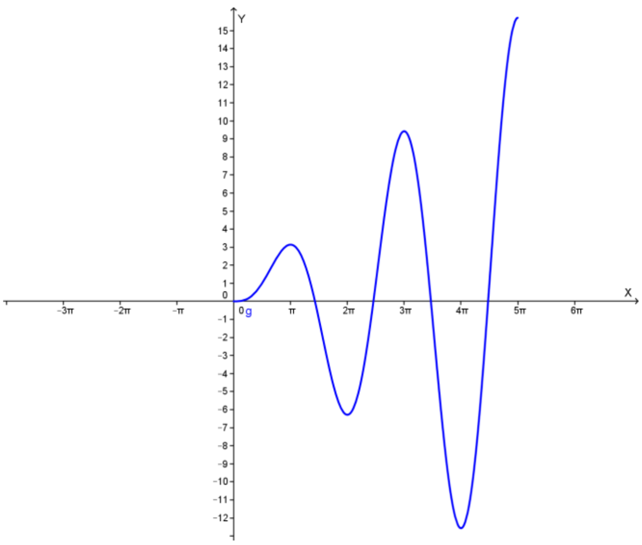
$\begin{cases} \cos(x) \neq 0 \\ tg(x) = -x \end{cases}$; risolviamo questo sistema graficamente:



Abbiamo dei flessi nei punti di ascissa:

$x = \alpha, \quad con \ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \ , \ x = \beta, \ con \ \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi \ , \ x = \gamma, \ con \ \frac{5}{2}\pi < \gamma < 3\pi$
$x = \delta, \quad con \ \frac{7}{2}\pi < \delta < 4\pi, \quad x = \epsilon \ , \quad con \ \frac{9}{2}\pi < \epsilon < 5\pi$

Il grafico della funzione, nell'intervallo richiesto, è il seguente:



2)

Determina il valore dell'integrale definito: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ *e, sapendo che risulta:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione: $\pi^3 + 18\pi < 96$ *anche non conoscendo il valore di* π.

Cerchiamo una primitiva di f(x):

$$\int (sen(x) - x \cdot \cos(x))dx = -\cos(x) - \int x \cdot \cos(x)\ dx$$

Integrando per parti si ha:

$$\int x \cdot \cos(x)\ dx = \int x \cdot (\mathrm{sen(x)})'\, dx = xsen(x) - \int sen(x)dx = xsen(x) + \cos(x) + k$$

Pertanto:

$$\int (sen(x) - x \cdot \cos(x))dx = -\cos(x) - \int x \cdot \cos(x)\ dx = -\cos(x) - xsen(x) - \cos(x) + k$$

Possiamo ora calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen(x) - x \cdot \cos(x))dx = [-2\cos(x) - xsen(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left\{-\frac{\pi}{2} - [-2]\right\} = 2 - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

Dobbiamo ora dedurre da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}$ che $\pi^3 + 18\pi < 96$ immaginando di non conoscere il valore di π .

Osserviamo che nell'intervallo $]0; \pi/2]$ risulta $f(x) \leq 1$; infatti:

$sen(x) - x \cdot \cos(x) \leq 1$: $1 - sen(x) \geq -x \cdot \cos(x)$ che risulta verificato nell'intervallo in questione essendo $1 - sen(x) \geq 0$ e $-x \cdot \cos(x) \leq 0$.

Risulta pertanto, in $]0; \pi/2]$, $f^2(x) \leq f(x)$ e perciò:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Segue che:

$$\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \leq 2 - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \pi^3 + 18\pi < 96 \quad c.v.d.$$

3)

Verifica che, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = 4, \qquad \int_0^{2n\pi} f(x)dx = 0.$$

Risulta:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = [-2\cos(x) - xsen(x)]_0^{\pi+2n\pi} = -2\cos(\pi + 2n\pi) - 0 - (-2)) = 2 + 2 = 4$$

$$\int_0^{2n\pi} f(x)dx = [-2\cos(x) - xsen(x)]_0^{2n\pi} = -2 - 0 - (-2) = 0$$

4)

Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

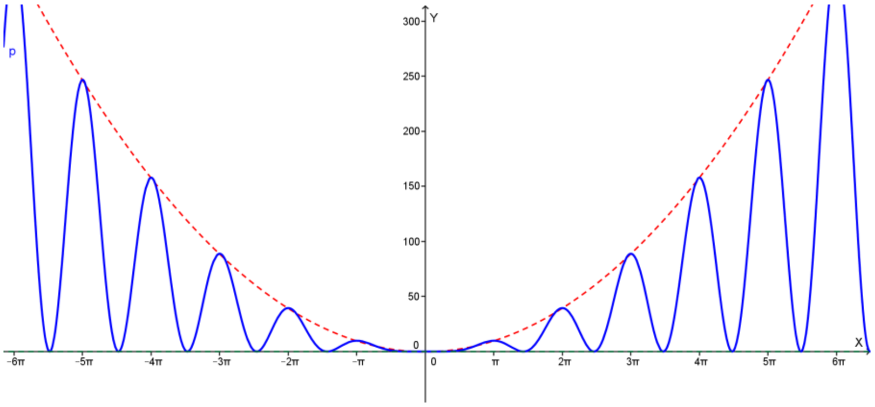
Osserviamo che la funzione $f^2(x)$ è sempre ≥ 0, ed in particolare vale zero dove si annulla f(x): quindi i minimi di $f^2(x)$ appartengono tutti all'asse x (y=0).

Siccome i massimi e minimi di $f(x)$, come osservato precedentemente, appartengono alle rette y=x e y=-x, possiamo dedurre che i massimi di $f^2(x)$ appartengono alla parabola $y = x^2$.

Dimostriamo quest'ultimo risultato in modo più analitico.
Studiamo la derivata di $f^2(x)$.
$D\left(f^2(x)\right) = 2f(x) \cdot f'(x)$

Essendo $f^2(x)$ continua e derivabile in tutto il suo dominio, i punti di massimo e di minimo sono da ricercarsi fra i valori che annullano $2f(x) \cdot f'(x)$, quindi fra i punti in cui si annulla $f(x)$ oppure $f'(x)$. Dove si annulla f(x) abbiamo già notato che ci sono i minimi; i massimi sono da ricercarsi quindi fra i punti per cui $f'(x) = 0,\ xsen(x) = 0$. Escludendo x=0 (in cui c'è un minimo) i massimi soddisfano l'equazione $sen(x) = 0$, quindi $x = k\pi$, con $k\epsilon\mathbb{Z}$; per tale x si ha $f^2(k\pi) = \left(f(k\pi)\right)^2 = (0 - k\pi\cos(k\pi))^2 = (k\pi)^2$:

i massimi hanno quindi coordinate $(k\pi; k^2\pi^2)$, quindi appartengono alla parabola di equazione $y = x^2$.



Con la collaborazione di Angela Santamaria