LICEO SCIENTIFICO SESSIONE STRAORDINARIA 2016 QUESTIONARIO

QUESITO 1

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(\cos(x)-1)}{\ln(\cos^2(x))}$$

Ricordiamo che, se f(x) tende a zero, risulta: $senf(x)\sim f(x)$ ed $\ln(1+f(x))\sim f(x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(\cos(x)-1)}{\ln(\cos^2(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)}{\ln(1-sen^2(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)}{-sen^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)}{-1+\cos^2(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos(x)-1)}{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}$$

Il limite richiesto è $\frac{1}{2}$.

QUESITO 2

In media, il 4% dei passeggeri dei tram di una città non paga il biglietto. Qual è la probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto in un tram con 40 persone? Se il numero di persone raddoppia, la probabilità raddoppia?

Sia E l'evento "un passeggero non paga il biglietto". Risulta: $p(E)=0.04$. La probabilità q che un passeggero paghi il biglietto è quindi: $q=p(\bar{E})=0.96$.
Detta p la probabilità che su 40 persone ci siano zero persone senza biglietto, secondo la formula della distribuzione binomiale (0 successi su 40 prove) abbiamo:

$$p=p(0,40)=\binom{40}{0}(0.04)^0(0.96)^{40}=0.96^{40}$$

La probabilità che ci sia almeno un passeggero senza biglietto è quindi:

$$1-p=1-0.96^{40}\cong 0.805\cong 80.5\ \%$$

Se il numero raddoppia la probabilità non raddoppia, infatti in questo caso abbiamo:

$$1-p=1-0.96^{80}\cong 0.962\cong 96.2\ \%$$

QUESITO 3

Determinare il parametro reale a in modo che i grafici di $y = x^2$ e di $y = -x^2 + 4x - a$, risultino tangenti e stabilire le coordinate del punto di tangenza.

Risolviamo il seguente sistema:

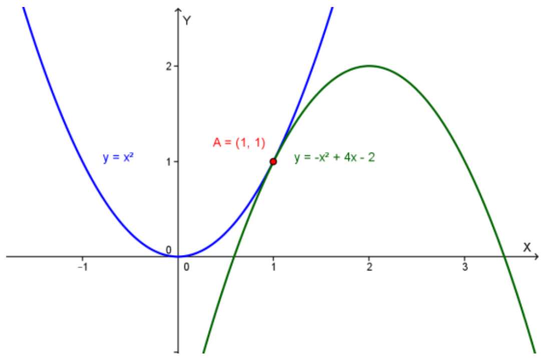
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x - a \end{cases} ; \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = -x^2 + 4x - a \end{cases} ; \ 2x^2 - 4x + a = 0 \ ; \ \frac{\Delta}{4} = 4 - 2a = 0 \ se \ a = 2.$$

Le parabole sono tangenti se $a = 2$.

Cerchiamo il punto di tangenza:

$$2x^2 - 4x + a = 0 \ ; \ 2x^2 - 4x + 2 = 0 ; \ x^2 - 2x + 1 = 0 \ ; (x-1)^2 = 0 ; \ x = 1$$

Le parabole sono tangenti nel punto (1; 1).



QUESITO 4

Dati i punti $A(2, 4, -8)$ e $B(-2, 4, -4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A.

Il centro C della sfera è il punto medio del segmento AB: $C = (0; 4; -6)$.
Il raggio R della sfera è la metà della distanza AB, quindi:

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(2+2)^2 + (4-4)^2 + (-8+4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+16} = 2\sqrt{2}$$

La sfera di diametro AB ha quindi equazione:

$$(x-0)^2 + (y-4)^2 + (z+6)^2 = 8 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 12z + 44 = 0$$

Il piano passante per A e tangente alla sfera equivale al piano passante per A e perpendicolare alla retta AC; i parametri direttori del piano coincidono con quelli della

normale AC, che sono: $a = 2 - 0 = 2$, $b = 4 - 4 = 0$, $c = -8 + 6 = -2$.
Il piano richiesto ha quindi equazione:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \ ; \quad 2(x - 2) - 2(z + 8) = 0, \qquad x - z - 10 = 0 \, .$$

QUESITO 5

Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% difettose, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?

La probabilità che una scatola prodotta nel primo capannone sia difettosa è quindi:

$$p_1 = 3\% = 0.03$$

La probabilità che una scatola prodotta nel secondo capannone sia difettosa è quindi:

$$p_1 = 2\% = 0.02$$

Mettiamo ora insieme le scatole (1000); estraiamo una scatola a caso: la probabilità che sia una di quelle prodotte nel primo capannone è $\frac{600}{1000} = 0.6$, la probabilità che sia una di quelle prodotte dal secondo capannone 0.4.

La probabilità che sia prodotta dal primo capannone e che sia difettosa è:

$$p_{1D} = 0.6 \cdot 0.03 = 0.018$$

La probabilità che sia prodotta dal secondo capannone e che sia difettosa è:

$$p_{2D} = 0.4 \cdot 0.02 = 0.008$$

La probabilità che sia difettosa è quindi:

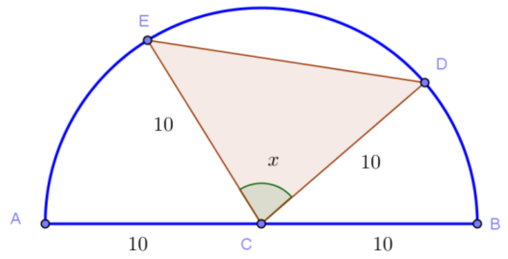
$$p_D = p_{1D} + p_{2D} = 0.026$$

La probabilità $p(2|D)$ che sia difettosa provenendo dal capannone 2 è:

$$p(2|D) = \frac{p(D \cap 2)}{p_D} = \frac{p_{2D}}{p_D} = \frac{0.008}{0.026} = \frac{4}{13} = 30.8\ \%$$

QUESITO 6

In un semicerchio di raggio $r = 10$ è inscritto un triangolo in modo che due vertici si trovino sulla semicirconferenza e il terzo vertice si trovi nel centro del cerchio. Qual è l'area massima che può assumere tale triangolo?



Indichiamo con x l'angolo compreso fra i lati CD ed EC del triangolo, che è isoscele, essendo CD ed EC raggi; risulta, in radianti, $0 \leq x \leq \pi$. L'area del triangolo è:

$$Area(CDE) = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot CD \cdot sen(x) = 50\, sen(x)$$

Tale area è massima quando $sen(x) = 1$, quindi per $x = \frac{\pi}{2}$.

Il triangolo di area massima è quello rettangolo in C e la sua area è 50.

QUESITO 7

Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione esplicitando il procedimento seguito:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n}$$

Dal limite notevole:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Segue che:

$$\lim_{f(n) \to \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$$

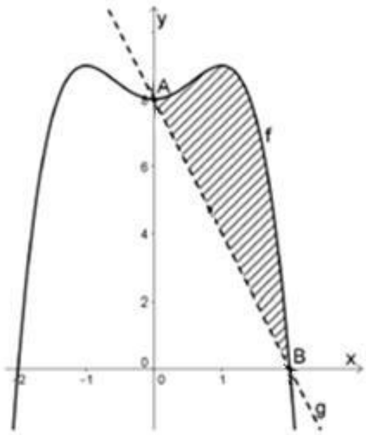
Quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\left(\frac{n}{3}\right)\cdot(-3)}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{-3}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

Il limite esiste ed è $\frac{1}{e^3}$.

QUESITO 8

Data la funzione $f(x)=-x^4+2x^2+8$, sia g la retta passante per i punti $A(0,8)$ e $B(2,0)$. Si calcoli l'area della regione tratteggiata indicata in figura.



La retta per A e B ha equazione: $\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1$, $y=-4x+8$.
L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$\int_0^2[(-x^4+2x^2+8)-(-4x+8)]\,dx=\int_0^2(-x^4+2x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=$$

$$=-\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+8=\frac{104}{15}\cong 6.93\,u^2=Area$$

QUESITO 9

Dati i punti $A(-2,0,1), B(1,1,2), C(0,-1,-2), D(1,1,0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.

Il generico piano ha equazione: $ax+by+cz+d=0$; imponiamo il passaggio per i tre punti A, B e C:

$\begin{cases}-2a+c+d=0\\a+b+2c+d=0\\-b-2c+d=0\end{cases}$; sommando la seconda e la terza equazione otteniamo: $a=-2d$;

il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} c = -5d \\ b = 11d \\ a = -2d \end{cases}$$

Il piano per A, B e C ha pertanto equazione:

$$-2dx + 11dy - 5dz + d = 0, \qquad 2x - 11y + 5z - 1 = 0$$

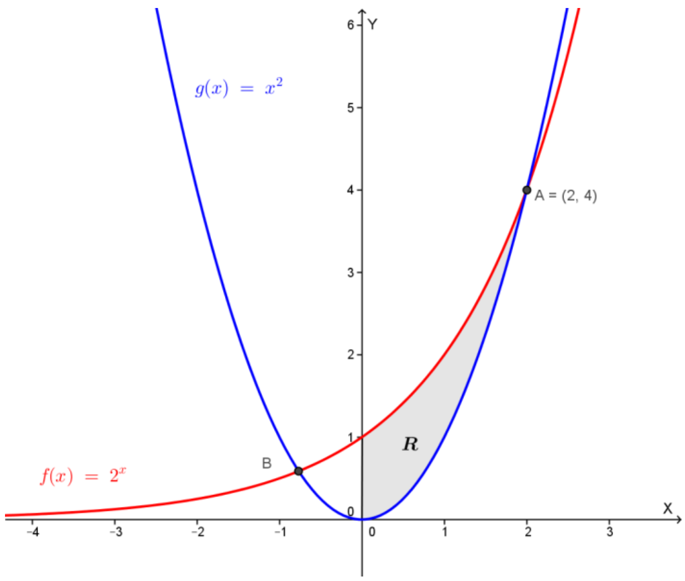
I parametri direttori di una normale ad un piano sono gli stessi del piano, uguali ai coefficienti di x, y e z: 2, -11, 5. La retta per D perpendicolare al piano trovato ha quindi equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_D + 2t \\ y = y_D - 11t \\ z = z_D + 5t \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 11t \\ z = 5t \end{cases}$$

QUESITO 10

Si consideri, nel piano cartesiano, la regione limitata R, contenuta nel primo quadrante, compresa tra l'asse y ed i grafici di $y = 2^x$ e $y = x^2$. Si determinino i volumi dei solidi che si ottengono ruotando R attorno all'asse x e all'asse y.

Rappresentiamo graficamente la regione R:



Le due curve si incontrano nel primo quadrante nel punto (2;4) (poi si incontreranno di nuovo, ma non cambia la regione R).

Ruotando attorno all'asse x abbiamo il volume:

$$V_x = \pi \int_0^2 [(2^x)^2 - (x^2)^2]dx = \pi \int_0^2 [4^x - x^4]dx = \pi \left[\frac{4^x}{\ln(4)} - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{16}{\ln(4)} - \frac{32}{5} - \frac{1}{\ln(4)}\right) = \pi\left(\frac{15}{\ln(4)} - \frac{32}{5}\right) \cong 13.887\ \ u^3 = V_x$$

Per il calcolo del volume ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y consideriamo le curve nella forma:

$$x = \log_2 y \qquad e \qquad x = \sqrt{y} \qquad (\text{è } x > 0)$$

In questo caso il volume è dato da:

$$V_y = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy + \pi \int_1^4 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - (\log_2 y)^2\right] dy = \pi \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 + \pi \left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^4 - \pi \int_1^4 (\log_2 y)^2 dy$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\left(8 - \frac{1}{2}\right) - \pi \int_1^4 \left(\frac{lny}{ln2}\right)^2 dy = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{15}{2} - \frac{1}{\ln^2 2}\int_1^4 (lny)^2 dy\right)$$

Cerchiamo una primitiva di $(lny)^2$, operando la sostituzione $lny = t \ \ da\ cui\ \ y = e^t$ ed integrando per parti:

$$\int \ln^2 y\, dy = \int t^2(e^t dt) = \int t^2(e^t)'dt = t^2e^t - \int 2te^t dt = t^2e^t - 2\int t(e^t)'dt =$$

$$= t^2e^t - 2\left[te^t - \int e^t dt\right] = t^2e^t - 2te^t + 2e^t + k = y(\ln^2 y - 2lny + 2) + k$$

Risulta quindi

$$V_y = \cdots = \pi\left(8 - \frac{1}{\ln^2 2}\int_1^4 (lny)^2 dy\right) = \pi\left(8 - \frac{1}{\ln^2 2}[y(\ln^2 y - 2lny + 2)]_1^4\right) =$$

$$= \pi\left(8 - \frac{1}{\ln^2 2}[4(\ln^2 4 - 2ln4 + 2) - (2)]\right) = \pi\left(8 - \frac{4\ln^2 4 - 8ln4 + 6}{\ln^2 2}\right) \cong 8.152\, u^3$$

Quindi $V_y = \pi\left(8 - \frac{4\ln^2 4 - 8ln4 + 6}{\ln^2 2}\right) \cong 8.152\ \ u^3$

Con la collaborazione di Angela Santamaria