SESSIONE SUPPLETIVA 2016 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si consideri questa equazione differenziale: $y'' + 2y' + 2y = x$. *Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.*

$a)\ y = e^{-x}(senx + cosx) + x$ $\qquad$ $b)\ y = 2e^{-x} + x$

$c)\ y = e^{-x}(senx + cosx) + \frac{1}{2}(x-1)$ $\qquad$ $d)\ y = 2e^{-2x} + x$

Caso a): $y' = -\frac{2\text{sen}(x)}{e^x} + 1 \qquad y'' = \frac{2\text{sen}(x) - 2\cos(x)}{e^x}$

Sostituendo nell'equazione:

$$\frac{2\text{sen}(x) - 2\cos(x)}{e^x} + 2\left(-\frac{2\text{sen}(x)}{e^x} + 1\right) + 2\left(e^{-x}(senx + cosx) + x\right) =$$
$$= 2e^{-x}(senx - cosx - 2senx + senx + cosx) + 2 + 2x = 2 + 2x \neq x$$

La a) non è soluzione.

Caso b): $y' = -2e^{-x} + 1 \qquad y'' = 2e^{-x}$

Sostituendo nell'equazione:

$$2e^{-x} + 2(-2e^{-x} + 1) + 2(2e^{-x} + x) \neq x$$

La b) non è soluzione.

Caso c): $y' = -\frac{2\text{sen}(x)}{e^x} + \frac{1}{2} \qquad y'' = \frac{2\text{sen}(x) - 2\cos(x)}{e^x}$

Sostituendo nell'equazione:

$$\frac{2\text{sen}(x) - 2\cos(x)}{e^x} + 2\left(-\frac{2\text{sen}(x)}{e^x} + \frac{1}{2}\right) + 2\left(e^{-x}(senx + cosx) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 2e^{-x}(senx - cosx - 2senx + senx + cosx) + 1 + x - 1 = x$$

La soluzione è la c).

Verifichiamo che la d) non è soluzione dell'equazione:

$y = 2e^{-2x} + x, \quad y' = -4e^{-2x} + 1, \quad y'' = 8e^{-2x}$

Sostituendo nell'equazione:

$$8e^{-2x} + 2(-4e^{-2x} + 1) + 2(2e^{-2x} + x) = 2 + 2(2e^{-2x} + x) \neq x$$

La d) non è soluzione.

QUESITO 2

Data la funzione così definita in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x \cdot e^{-|x^3-1|},$$

determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti.

Risulta f(x)<0 se x<0, f(x)=0 se x=0, f(x)>0 se x>0.
Inoltre la f può essere espressa nella forma seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x^3+1}, & se\ x > 1 \\ x \cdot e^{x^3-1}, & se\ x < 1 \\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}$$

La funzione è continua su tutto R. Analizziamo la derivata prima:

$\boldsymbol{Se\ x > 1}$: $f'(x) = e^{-x^3+1} + x\left(-3x^2 e^{-x^3+1}\right) = e^{-x^3+1}(1 - 3x^3) \geq 0\ se\ 1 - 3x^3 \geq 0,$

$x \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, quindi se x>1 $f'(x) < 0$, quindi la funzione è decrescente.

$\boldsymbol{Se\ x < 1}$: $f'(x) = e^{x^3-1} + x\left(3x^2 e^{x^3-1}\right) = e^{x^3-1}(1 + 3x^3) \geq 0\ se\ 1 + 3x^3 \geq 0,$

$x \geq \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$, quindi se x<1 $f'(x) \geq 0$ per $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}} \leq x < 1$; pertanto, quando x<1 si ha:
per $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}} < x < 1$ la funzione è crescente, se $x < \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ la funzione è decrescente.
Quindi $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ è punto di minimo relativo.

Notiamo che in x=1 risulta:

$f'_-(1) = 4, \quad f'_+(1) = -2$: quindi in x=1 abbiamo un punto angoloso.

Globalmente abbiamo la seguente situazione:

$x < \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$: funzione decrescente (e negativa)
$\sqrt[3]{-\frac{1}{3}} < x < 1$: funzione crescente (negativa fino a zero, positiva da zero a 1)
$x > 1$: funzione decrescente (e positiva)

La funzione ha quindi un minimo relativo (e assoluto) per $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$ con ordinata

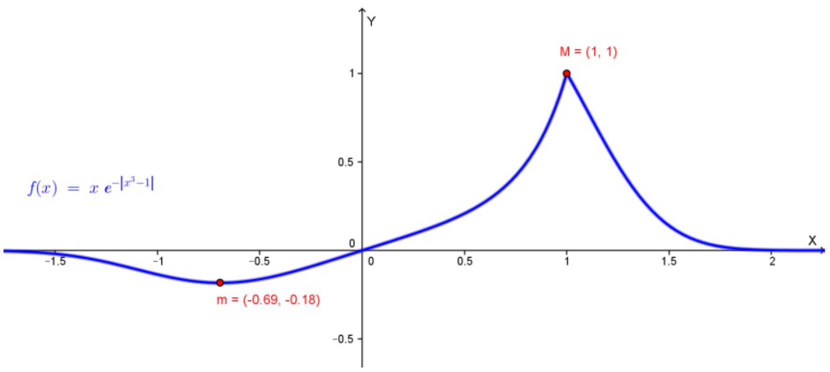
$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}\, e^{-\frac{4}{3}}$ ed un massimo assoluto per $x = 1$, con ordinata $y = 1$.

Vediamo se ci sono asintoti. Essendo la funzione continua non possono esserci asintoti verticali. Vediamo se ci sono asintoti obliqui e/o orizzontali:

$\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{-|x^3-1|} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{x^3} = 0^-$: quindi per $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale $y = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{-|x^3-1|} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^3}} = 0^+$: quindi per $x \to +\infty$ abbiamo l'asintoto orizzontale $y = 0$.

Proponiamo, anche se non richiesto, il grafico della funzione:



QUESITO 3

Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0.1\ m^3$ *e sta diminuendo alla velocità di* $1200\ \frac{cm^3}{sec}$.

Indicando con V il volume del cubo e con L il suo spigolo abbiamo: $V = L^3$.
Il volume V varia nel tempo secondo una legge del tipo: $V = V_0 - v \cdot t$, essendo V_0 il volume iniziale e v la velocità **costante**, quindi:

$$V = 100\ dm^3 - 1.2\ \frac{dm^3}{sec} \cdot t = 100 - 1.2\ t = V(t)$$

Da $V = L^3$ segue $L = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{100 - 1.2\ t}$, pertanto la variazione dello spigolo è:

$$\frac{dL}{dt} = L'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt[3]{100 - 1.2\ t}\right) = \frac{1}{3}(100 - 1.2\ t)^{-\frac{2}{3}}(-1.2)) =$$

$$= \frac{-0.4}{\sqrt[3]{(100 - 1.2\ t)^2}} = velocità\ di\ variazione\ dello\ spigolo\ del\ cubo$$

QUESITO 4

Posto, per $n \in \mathbb{N}, A_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, *stabilire il valore di* A_1 *e dimostrare che, per ogni* $n > 0$, *si ha* $A_n = e - n\, A_{n-1}$.

Integrando per parti abbiamo:

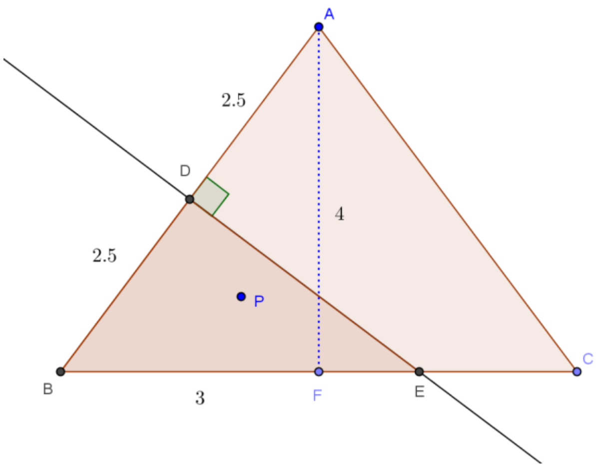
$$A_1 = \int_0^1 x e^x \, dx = [x\, e^x - e^x]_0^1 = 1$$

Dimostriamo, **per via diretta**, che, per ogni $\mathrm{n} > 0$, si ha $A_n = e - n\, A_{n-1}$.
Integrando per parti abbiamo:

$$A_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx = e - nA_{n-1}$$

QUESITO 5

I lati di un triangolo ABC misurano: $AB = 5\, cm,\; BC = 6\, cm,\; CA = 5\, cm$. *Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P sia più vicino al vertice B che al vertice A?*



Tracciato l'asse del lato AB ed indicata con E l'intersezione con il lato BC, osserviamo che i punti del semipiano di origine DE che contengono B sono più vicini a B che ad A, quindi la probabilità richiesta è data da:

$$p = \frac{Area(BDE)}{Area(ABC)}$$

Essendo AF=4 cm, l'area di ABC è: $Area(ABC) = 3 \cdot 4\, cm^2 = 12\, cm^2$.

Per trovare l'area di BDE cerchiamo DE dopo aver notato che BDE è simile a BFA:

$$DE : AF = BD : BF\ ,\ \ DE = \frac{AF \cdot BD}{BF} = \frac{4 \cdot 2.5}{3} = \frac{10}{3}\ cm$$

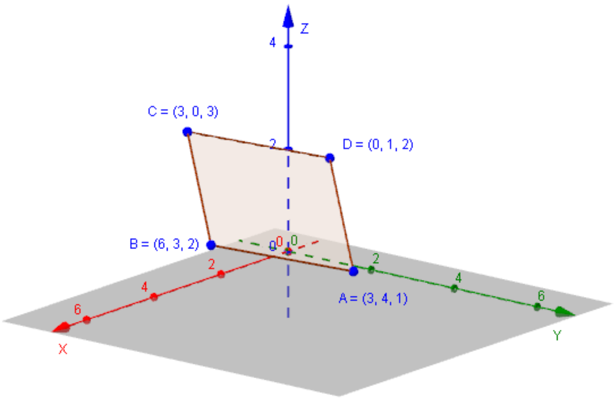
Quindi: $Area(BDE) = \frac{BD \cdot DE}{2} = \frac{2.5 \cdot \frac{10}{3}}{2}\ cm^2 = \frac{25}{6}\ cm^2$

Pertanto: $p = \frac{Area(BDE)}{Area(ABC)} = \frac{\frac{25}{6}}{12} = \frac{25}{72} \cong 0.3472 \cong 34.7\ \%$.

QUESITO 6

I punti $A(3;4;1)$, $B(6;3;2)$, $C(3;0;3)$, $D(0;1;2)$ sono vertici di un quadrilatero $ABCD$. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

Per dimostrare che ABCD è un parallelogramma è sufficiente dimostrare chela retta BC è parallela ad AD ed AB è parallela a CD.



Cerchiamo i parametri direttori delle rette.

Retta AB:
$a = 6 - 3 = 3, b = 3 - 4 = -1, c = 2 - 1 = 1$

Retta AD:
$a = 3 - 0 = 3, b = 4 - 1 = 3, c = 1 - 2 = -1$

Retta BC:
$a = 6 - 3 = 3, b = 3 - 0 = 3, c = 2 - 3 = -1$

Retta CD:
$a = 3 - 0 = 3, b = 0 - 1 = -1, c = 3 - 2 = 1$

Riepilogando:
retta AB: (3; -1; 1), retta CD: (3; -1; 1). Quindi AB è parallela a CD.
Retta BC: (3; 3; -1), retta AD: (3; 3; -1). Quindi BC è parallela ad AD.

ABCD è un parallelogramma.

Per stabilire se il parallelogramma è un rettangolo è necessario (e sufficiente) verificare se due lati consecutivi sono perpendicolari.

Verifichiamo se AB è perpendicolare a BC, ricordando che la condizione di perpendicolarità richiede che la somma dei prodotti dei parametri direttori sia nulla:

$$(3)(3) + (-1)(3) + (1)(-1) = 9 - 3 - 1 = 5 \neq 0$$

ABCD è non è un rettangolo.

QUESITO 7

Determinare la distanza tra il punto $P(2;1;1)$ *la retta:*

$$\begin{cases} x+y=z+1 \\ z=-y+1 \end{cases}$$

La distanza richiesta può essere trovata cercando il piano per P perpendicolare alla retta data, cercando l'intersezione H tra il piano suddetto e la retta data e calcolando la distanza PH.
Per scrivere l'equazione del piano in questione ci servono i parametri direttori della retta data, che conviene riscrivere in forma parametrica (poniamo $y=t$):

$$\begin{cases} x=z+1-y=1-t+1-t=2-2t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Una terna di parametri direttori della retta (uguali a quelli del piano ad essa perpendicolare) sono: $(-2;1;\ -1)$.

Il piano per $P(2;1;1)$ perpendicolare alla retta ha equazione:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$-2(x-2)+1(y-1)-1(z-1)=0$$

$$-2x+y-z+4=0,\ \ 2x-y+z-4=0$$

Cerchiamo l'intersezione H fra la retta data ed il piano per P ad essa perpendicolare:
$2(2-2t)-(t)+(1-t)-4=0, -6t+1=0, \qquad t=\dfrac{1}{6}$

Quindi H ha coordinate:

$$H: \begin{cases} x=2-2t=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \\ y=t=\frac{1}{6} \\ z=1-t=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \end{cases} \qquad H=\left(\frac{5}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$$

Calcoliamo ora la distanza di $P(2;1;1)$ da $H=\left(\frac{5}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$, che è la distanza richiesta:

$$PH=\sqrt{\left(2-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{25}{36}+\frac{1}{36}}=\sqrt{\frac{30}{36}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

QUESITO 8

Supponiamo che l'intervallo di tempo t (in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di $100\ m^2$ *sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:*

$$P(t \le z) = \int_0^z 0.01 \cdot e^{-0.01\, s}\, ds$$

a) Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni l'uno dall'altro.
b) Si determini qual è il minimo numero di anni z, tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro.

a) La probabilità richiesta è data da:

$$P(t \le 200) = \int_0^{200} 0.01 \cdot e^{-0.01\, s}\, ds = [-e^{-0.01\, s}]_0^{200} = -e^{-2} + 1 \cong 0.865 \cong 86.5\ \%$$

b) Dobbiamo risolvere la seguente disequazione:

$$P(t \le z) = \int_0^z 0.01 \cdot e^{-0.01\, s}\, ds \ge 0.95$$

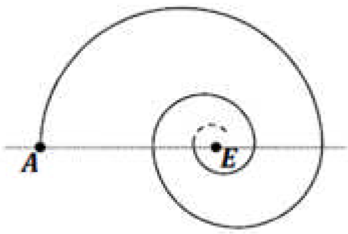
$$\int_0^z 0.01 \cdot e^{-0.01\, s}\, ds = [-e^{-0.01\, s}]_0^z = -e^{-0.01\, z} + 1 \ge 0.95\,, \quad e^{-0.01\, z} \le 0.05,$$

$$-0.01z \le \ln(0.05)\,, \qquad z \ge \frac{\ln(0.05)}{-0.01}, \quad z \ge 299.573$$

Il minimo numero di anni z, tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro è $z = 299.573$, cioè circa 300 anni.

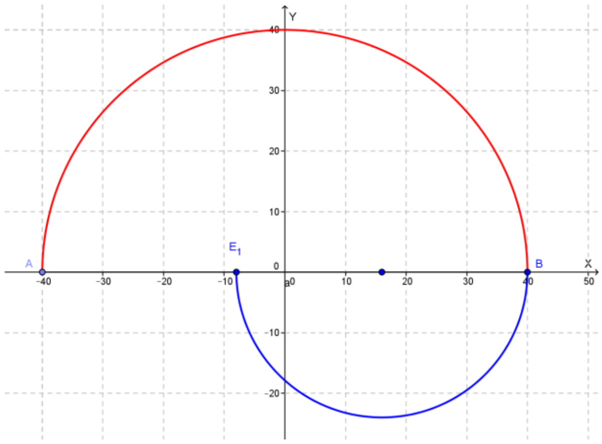
QUESITO 9

Una curva "a spirale" inizia nel punto A, come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 *della prima semicirconferenza è di* $80\ cm$*. Il diametro* d_2 *della seconda è pari ai* $\frac{3}{5}\ di\ \ d_1$*. Il diametro* d_3 *della seconda è pari ai* $\frac{3}{5}\ di\ \ d_2$*, e così via:* $d_{n+1} = \frac{3}{5}\, d_n$ *per ogni n.*
Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie semicirconferenze tendono al cosiddetto "occhio" E della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).
Qual è la distanza (in linea retta) tra il punto A e il punto E?
E qual è la lunghezza del cammino che va da A a E, percorrendo l'intera curva?

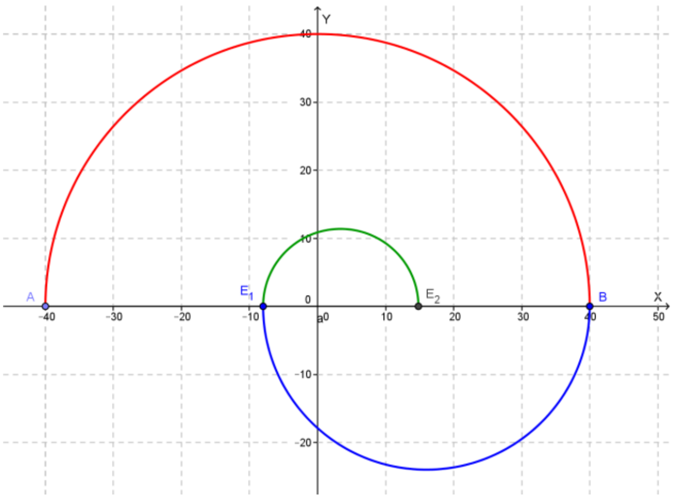


I diametri delle semicirconferenze formano una progressione geometrica con primo termine $d_1 = 80$ e ragione $q = \frac{3}{5}$.

Calcoliamo la distanza tra il punto A ed il punto E. Osserviamo la seguente figura in cui sono rappresentate le prime due semicirconferenze, che hanno diametri $d_1 = 80\ cm$ e $d_2 = \frac{3}{5}80\ cm = 48\ cm$; risulta: $AE_1 = d_1 - d_2 = 32\ cm$



Aggiungiamo la terza semicirconferenza, che ha diametro $d_3 = \frac{3}{5}d_2 = \frac{3}{5}(48) = 28.8\ cm$.
Risulta ora: $AE_2 = AE_1 + E_1E_2 = (d_1 - d_2) + d_3 = 60.8\ cm$



Generalizzando abbiamo:

$$AE_n = d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + d_5 - d_6 + \cdots = d_1 - \frac{3}{5}d_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 d_1 + \cdots =$$

$$= d_1\left(1 - \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 - \cdots\right)$$

Osserviamo che $\left(1 - \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 - \cdots\right)$ è la somma di infiniti termini di una progressione geometrica con primo termine 1 e ragione $q = -\frac{3}{5}$ e risulta:

$$\left(1 - \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 - \cdots\right) = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

Risulta pertanto:

$$AE_n = d_1 \cdot \frac{5}{8} = 80 \cdot \frac{5}{8}\ cm = 50\ cm$$

La distanza (in linea retta) tra il punto A e il punto E è di 50 cm.

La lunghezza della generica semicirconferenza di diametro d è data da $\pi r = \frac{\pi d}{2}$, quindi:

$$C_1 = \frac{\pi}{2}d_1, \quad C_2 = \frac{\pi}{2}d_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{5}d_1\right) = \frac{3}{5}C_1, \quad \ldots \quad , \quad C_{n+1} = \frac{3}{5}C_n$$

Quindi le semicirconferenze che formano la spirale sono anch'esse in progressione geometrica con primo termine $C_1 = \frac{\pi}{2}d_1 = 40\,\pi$ e ragione $q = \frac{3}{5}$.

La lunghezza L del cammino che va da A ad E lungo le semicirconferenze è uguale alla somma delle infinite semicirconferenze, cioè:

$$L = C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots = \lim_{n\to\infty}(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} d_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{\pi}{2} \cdot d_1 \lim_{n\to\infty}\frac{1 - q^n}{1 - q} = 40\pi \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} = 40\pi \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}} = 100\,\pi = L$$

La lunghezza L del cammino che va da A a E, percorrendo l'intera curva è $L = 100\pi\ cm$.

QUESITO 10

Si stabilisca il valore del limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 73\cos^3\left(4x + \frac{\pi}{11}\right)}{5x - sen^2\left(x - \frac{\pi}{7}\right)}$$

motivando adeguatamente la risposta.

Osserviamo che il numeratore oscilla tra 2-73 e 2+73 (non ammette limite per $x \to +\infty$).
Il denominatore, per $x \to +\infty$, si comporta come “5x”, poiché il termine rimanente è limitato (in particolare fra -1 e 0), quindi tende a $+\infty$.

Per il teorema del confronto il limite è quindi uguale a zero.

Ricordiamo che, per il teorema del confronto, la funzione $f(x) \cdot g(x)$, se una delle due è un infinitesimo e l’altra è limitata, tende a zero.

Con la collaborazione di Angela Santamaria