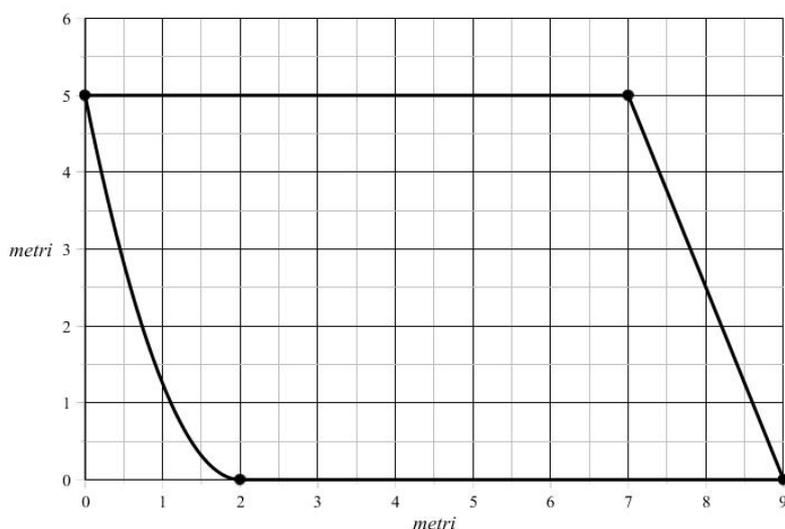


SESSIONE SUPPLETIVA - 2016

PROBLEMA 1

Sei l'amministratore di un condominio che ha deliberato di dotarsi di una sala per le riunioni condominiali, sfruttando uno spazio comune già disponibile, da coprire e attrezzare.

La superficie individuata è rappresentata in figura 1:



La superficie viene chiusa con pareti laterali alte 3,60 metri e con un tetto piano e orizzontale. Uno dei condomini ti fa presente la necessità di prevedere un impianto di aerazione nella sala, in quanto la mancanza di un adeguato ricambio d'aria in locali chiusi può provocare una serie di disturbi fisici, a causa dell'accumulo di CO_2 (anidride carbonica o diossido di carbonio). Di norma si considera come valore limite della concentrazione di CO_2 lo 0,15%: su 1 milione di particelle d'aria il massimo numero di molecole di CO_2 deve essere dunque 1500.

Nella scelta dell'impianto di aerazione un parametro fondamentale è la potenza in kilowatt, che dipende dal volume dell'ambiente in cui esso viene utilizzato.

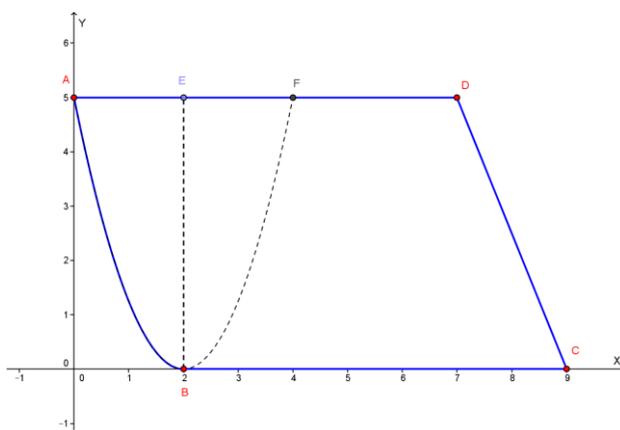
La seguente scheda tecnica, fornita dal produttore, fa riferimento alle comuni esigenze di utilizzo:

METRI CUBI DA AERARE	POTENZA RICHIESTA (Kilowatt)
41	2
68	2,6
108	3,5
135	4,4
162	5,3
216	6,1
270	7,2

1)

In base ai dati disponibili e alla scheda tecnica, stima la potenza in kilowatt necessaria, giustificando la tua scelta.

Dobbiamo calcolare il volume del locale, che può essere considerato un cilindro con area di base pari all'area della superficie della sala e altezza $h = 3.60 \text{ m}$.



L'arco AB fa parte della parabola tangente all'asse delle x in $B=(2; 0)$ e passante per $A=(0; 5)$; essa ha equazione del tipo: $y = a(x - 2)^2$ ed imponendo il passaggio per A otteniamo $5 = 4a$, $a = \frac{5}{4}$. La parabola ha quindi equazione:

$$y = \frac{5}{4}(x - 2)^2$$

L'area della superficie del locale è data dall'area della metà del segmento parabolico ABE e quella del trapezio rettangolo con basi BC e DE ed altezza BE.

Per il teorema di Archimede l'area del segmento parabolico è uguale a:

$$Area(ABFE) = \frac{2}{3} \cdot AF \cdot BE = \frac{2}{3} (4)(5) = \frac{40}{3} \text{ m}^2 .$$

L'area del trapezio è data da:

$$Area(BCDE) = \frac{(7 + 5) \cdot 5}{2} = 30 \text{ m}^2$$

La superficie della sala è pari quindi a:

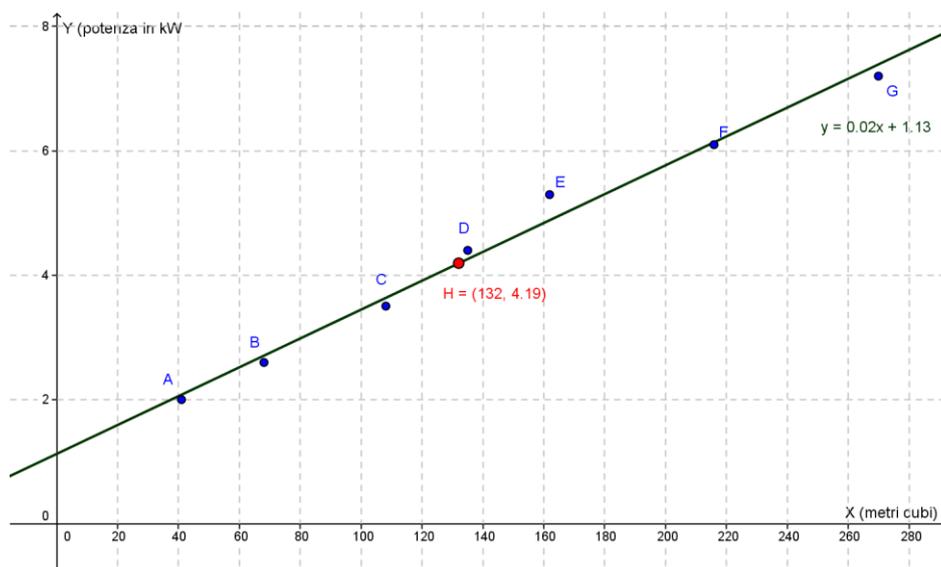
$$S(sala) = Area(ABE) + Area(BCDE) = \left(\frac{20}{3} + 30\right) \text{ m}^2 = \frac{110}{3} \text{ m}^2 \cong 36.67 \text{ m}^2$$

Il volume della sala è quindi dato da:

$$Volume(sala) = Area(base) \cdot altezza = \frac{110}{3} \cdot 3.60 \text{ m}^3 = 132 \text{ m}^3$$

In base alla scheda tecnica fornita, che prevede 4.4 kW per 135 metri cubi da aerare, possiamo affermare che **la potenza in kilowatt necessaria è stimabile in poco meno di 4.4 kW.**

Mostriamo, anche se non esplicitamente richiesta, la retta di regressione relativa ai dati forniti, in cui **la stima della potenza richiesta risulta essere di 4.19 kW.**



Ricordiamo che i coefficienti m e q della retta di regressione $y = mx + q$, ottenuta mediante il cosiddetto metodo dei "minimi quadrati" si ottengono mediante le formule seguenti, in cui \bar{x} è la media aritmetica delle x , \bar{y} la media aritmetica delle y , n è il numero dei punti e $(x_i; y_i)$ sono le coordinate dei punti dati:

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ q = \bar{y} - m\bar{x} \end{cases}$$

Per brevità non riportiamo i calcoli (piuttosto lunghi) che portano a determinare m e q , che risultano rispettivamente: $m = 0.02$, $q = 1.13$. La retta di regressione ha quindi equazione: $y = 0.02x + 1.13$. Sostituendo in questa equazione il volume $x = 132$ metri cubi del locale da aerare otteniamo la stima della potenza richiesta $y = 4.19$ kW.

In occasione di una riunione di condominio, un rilevatore di CO_2 installato nella sala indica una concentrazione dello 0,3%; i condomini chiedono quindi di accendere l'impianto di aerazione, in modo che all'ora di inizio della riunione la concentrazione sia stata ridotta allo 0,15%. Il sistema di aerazione immette nella sala $20 \frac{m^3}{minuto}$ di aria fresca contenente lo 0,1% di CO_2 .

2)

Approssimando il volume della sala a $130 m^3$, ricava l'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c(t)$ in funzione del tempo t (espresso in minuti). Verifica inoltre che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ è una soluzione di tale equazione differenziale.

Detta $c(t)$ la concentrazione di anidride carbonica nella sala al generico istante t e $h=0.001$ la concentrazione (costante) di anidride carbonica dell'aria immessa dall'aeratore, per effetto dell'immissione di aria fresca la concentrazione va diminuendo, pertanto abbiamo una velocità (negativa, poiché la concentrazione va diminuendo) data da:

$$c'(t) = \frac{dc(t)}{dt}$$

La concentrazione $c(t)$ all'istante t è data da: $c(t) = \frac{Volume_{CO_2}(t)}{Volume_{sala}(t)} = \frac{V_{CO_2}(t)}{V_{sala}}$.

Ma risulta (essendo $20 m^3$ il volume d'aria ricambiata al minuto):

$$dc(t) = c(t + dt) - c(t) = \frac{dV_{CO_2}(t)}{V_{sala}} = \frac{V_{CO_2}(immesso) - V_{CO_2}(eliminato)}{V_{sala}} = \frac{h \cdot 20 \cdot dt - c(t) \cdot 20 \cdot dt}{V_{sala}}$$

Quindi:

$$c'(t) = \frac{dc(t)}{dt} = \frac{h \cdot 20 dt - c(t) \cdot 20 dt}{130} = -\frac{20}{130}(c(t) - h) = -\frac{2}{13}(c(t) - h)$$

Osserviamo che $c'(t) = 0$ quando $c(t) = h$, che avviene per t che tende all'infinito: arriviamo al completo ricambio dell'aria della sala.

L'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c(t)$ in funzione del tempo t (in minuti) è quindi:

$$c'(t) = -\frac{2}{13}(c(t) - h)$$

Verifichiamo, come richiesto, che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ è una soluzione di tale equazione differenziale. La derivata di tale funzione è:

$$c'(t) = -\frac{2}{13}k \cdot e^{-\frac{2}{13}t}; \text{ ma } c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h, \text{ quindi } k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} = c(t) - h, \text{ pertanto:}$$

$c'(t) = -\frac{2}{13}k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} = -\frac{2}{13}(c(t) - h)$ che è l'equazione differenziale trovata.

Abbiamo quindi verificato che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ è una soluzione dell'equazione differenziale $c'(t) = -\frac{2}{13}(c(t) - h)$

Risolviamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dc}{c(t) - h} = -\frac{2}{13} dt, \ln|c(t) - h| = -\frac{2}{13}t + a, |c(t) - h| = e^{-\frac{2}{13}t+a} = e^a \cdot e^{-\frac{2}{13}t}$$

$c(t) = \pm e^a \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$, $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ (abbiamo posto $k = \pm e^a$ e quindi k può essere positivo o negativo).

Quindi:

$$c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h \quad \text{c.v.d.}$$

3)

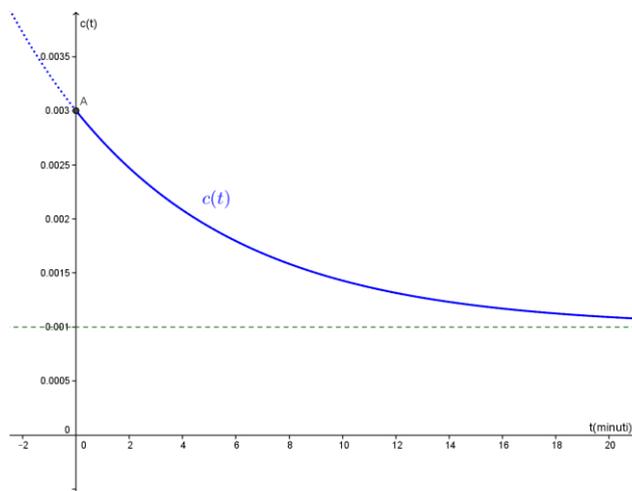
Determina i valori da assegnare alle costanti k e h in modo che la funzione $c(t)$ rappresenti l'andamento della concentrazione di CO_2 a partire dall'istante $t = 0$ di accensione dell'aeratore. Stabilisci quindi quanto tempo prima dell'inizio della riunione esso deve essere acceso, per soddisfare la richiesta dei condomini.

In base alle informazioni fornite, per $t=0$ la concentrazione è pari a 0.3%, quindi se $t=0$ deve risultare $c(t) = 0.003$, pertanto, avendo già detto che $h=0.001$:
 $0.003 = k + h$, $k = 0.003 - 0.001 = 0.002$.

Risulta perciò:

$$c(t) = 0.002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0.001$$

Il grafico di questa funzione si può tracciare facilmente notando che è una funzione esponenziale che per $t=0$ vale 0.003, è sempre decrescente e per t che tende a più infinito tende a 0.001:



Dobbiamo ora trovare t in modo che sia $c(t) = 0.15\% = 0.0015$; si ha perciò:

$$0.0015 = 0.002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0.001, \quad 0.002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} = 0.0005, \quad e^{-\frac{2}{13}t} = 0.25,$$

$$-\frac{2}{13}t = \ln(0.25), \quad t = -\frac{13}{2} \cdot \ln(0.25) \cong 9 \text{ minuti}$$

L'aeratore deve quindi essere acceso circa 9 minuti prima dell'inizio della riunione.

4)

L'impianto è in funzione da 10 minuti, quando i 50 partecipanti alla riunione accedono alla sala. Considerando che l'impianto rimane acceso anche durante la riunione e che un essere umano mediamente espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di CO_2 (fonte: OSHA, Occupational Safety and Health Administration), descrivi in termini qualitativi come cambierà l'andamento di $c(t)$ dopo l'ingresso dei condomini nella sala, giustificando la tua risposta.

I 50 partecipanti immettono nella sala $8 \times 50 = 400$ litri/minuto di aria contenente il 4% di CO_2 . Dopo 10 minuti di funzionamento dell'aeratore la concentrazione di anidride carbonica è pari a:

$$c(10) = 0.002 \cdot e^{-\frac{2}{13} \cdot 10} + 0.001 \cong 0.00143 \cong 0.143 \%$$

I 50 condomini immettono aria contenente il 4% di CO_2 alla velocità di:

$$400 \frac{\text{litri}}{\text{minuto}} = 400 \frac{\text{dm}^3}{\text{minuto}} = 0.4 \frac{\text{m}^3}{\text{minuto}}$$

L'effetto combinato dell'aeratore e dei condomini equivale quindi ad immettere in ogni minuto 20 metri cubi di aria con una concentrazione di anidride carbonica allo 0,1% e 0.4 metri cubi con una concentrazione di anidride carbonica al 4%. I volumi di anidride carbonica immessi in un minuto dall'aeratore e dai condomini sono dati da:

$$V_{CO_2}(\text{aeratore}) = 0.001 \cdot 20 \text{ m}^3 = 0.02 \text{ m}^3$$

$$V_{CO_2}(\text{condomini}) = 0.04 \cdot 0.4 \text{ m}^3 = 0.016 \text{ m}^3$$

Il volume totale di anidride carbonica immessa nella stanza in un minuto è quindi pari a:

$$V_{CO_2}(\text{aeratore}) + V_{CO_2}(\text{condomini}) = 0.036 \text{ m}^3$$

La concentrazione dell'anidride carbonica dell'aria totale immessa è uguale a:

$$\frac{V(\text{CO}_2 \text{ immessa in un minuto})}{V(\text{aria immessa in un minuto})} = \frac{0.036 \text{ m}^3}{20.4 \text{ m}^3} \cong 0.00176 = 0.176 \%$$

La funzione che descrive l'andamento della concentrazione di anidride carbonica dopo l'ingresso dei condomini, ragionando in modo analogo a quello fatto per trovare la precedente espressione di $c(t)$, è del tipo:

$$c_1(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{20.4}{130}t} + 0.00176$$

Per trovare k_1 osserviamo che deve essere: $c_1(10) = c(10) = 0.00143$ quindi:

$$0.00143 = k_1 \cdot e^{-\frac{20.4}{130}} + 0.00176, \quad k_1 = (0.00143 - 0.00176) \cdot e^{\frac{20.4}{130}} \cong -0.00158$$

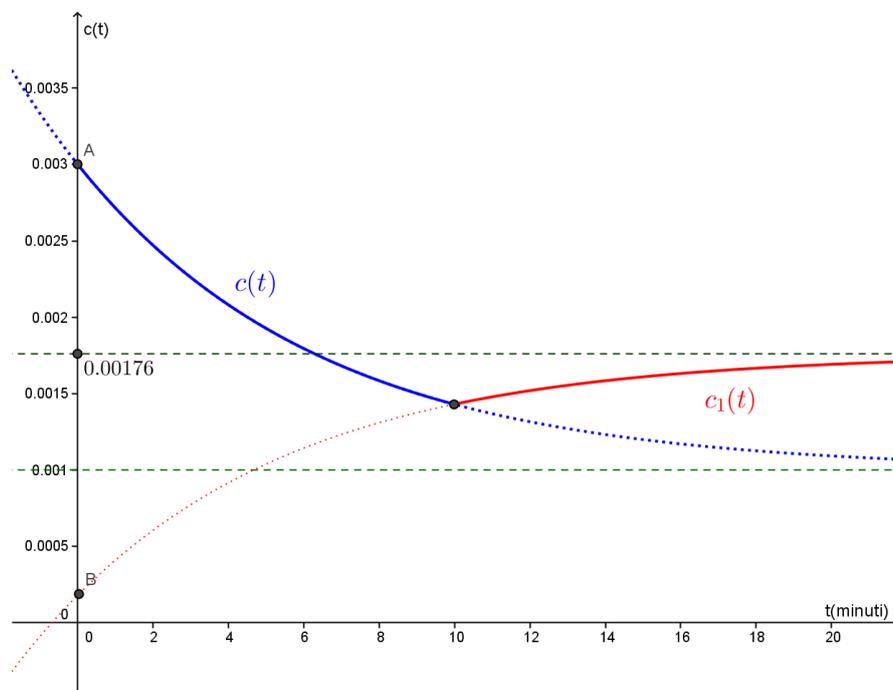
L'andamento della concentrazione che prima dell'arrivo dei condomini ($t=10$) era

$$c(t) = 0.002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0.001 \quad \text{diventa (da } t=10 \text{ in poi)} \quad c_1(t) = -0.00158 \cdot e^{-\frac{20.4}{130}t} + 0.00176$$

Possiamo riassumere l'andamento complessivo della concentrazione, da quando è stato acceso l'aeratore ($t=0$), nella funzione seguente:

$$c(t) = \begin{cases} 0.002 \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + 0.001, & \text{se } 0 \leq t < 10 \\ -0.00158 \cdot e^{-\frac{20.4}{130}t} + 0.00176, & \text{se } t \geq 10 \end{cases}$$

che ha il seguente grafico:

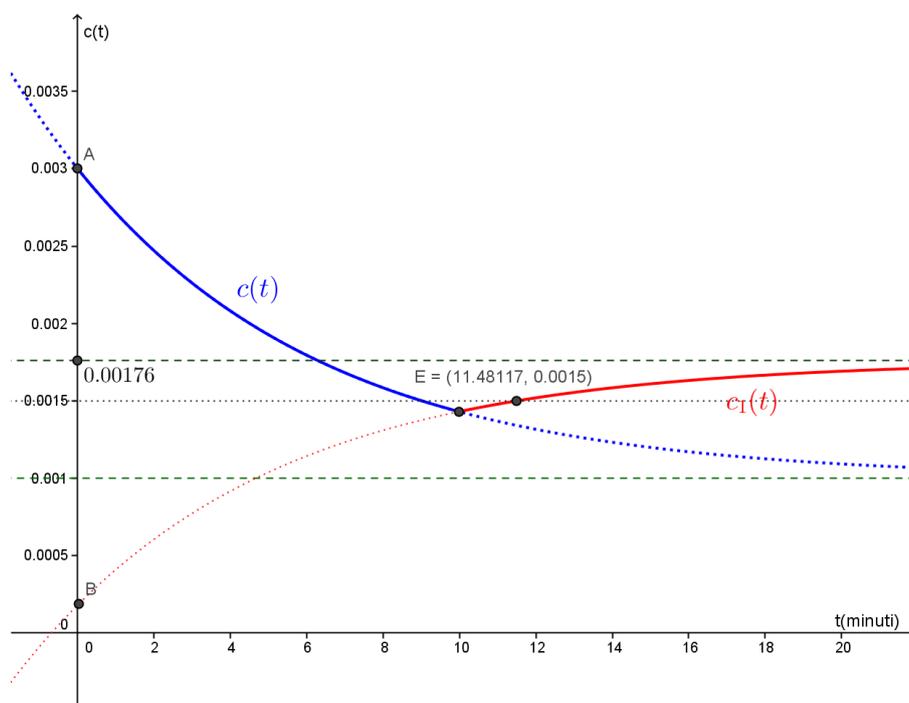


Osserviamo che dopo l'ingresso dei condomini la concentrazione dell'anidride carbonica comincia a crescere. Il valore limite della concentrazione di CO_2 , lo 0,15%, si ottiene dopo un numero di minuti t che si trova risolvendo la seguente equazione:

$$-0.00158 \cdot e^{-\frac{20.4}{130}t} + 0.00176 = 0.0015, \quad e^{-\frac{20.4}{130}t} = \frac{0.00176 - 0.0015}{0.00158} \cong 0.16456$$

$$-\frac{20.4}{130}t = \ln(0.16456), \quad t = -\frac{130}{20.4} \cdot \ln(0.16456) \cong 11.499 \text{ minuti}$$

Quindi dopo circa un minuto e mezzo dall'inizio della riunione viene raggiunto il valore limite della concentrazione 0.15 % di anidride carbonica, ma la concentrazione rimarrà comunque inferiore 0.00176, cioè allo 0.18 % circa:



Con la collaborazione di Stefano Scoleri e Angela Santamaria