SCIENTIFICO COMUNICAZIONE OPZIONE SPORTIVA 2017 - PROBLEMA 1

Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la funzione g_λ è così definita:

$$g_\lambda = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$$

e si indica con Γ_λ il suo grafico, in un riferimento cartesiano Oxy.

1)

Traccia i seguenti grafici: Γ_{-5} , Γ_0 , Γ_3 , Γ_4 , Γ_9 .

Per $\lambda = -5$ abbiamo la funzione:

$$g_{-5} = \frac{x-2}{x^2+5}$$

La funzione è definita e continua su tutto R, è positiva per x>2, taglia l'asse x in x=2 e l'asse y in y=-2/5; ammette l'asintoto y=0 per $x \to \pm\infty$. Studiamo la derivata prima:

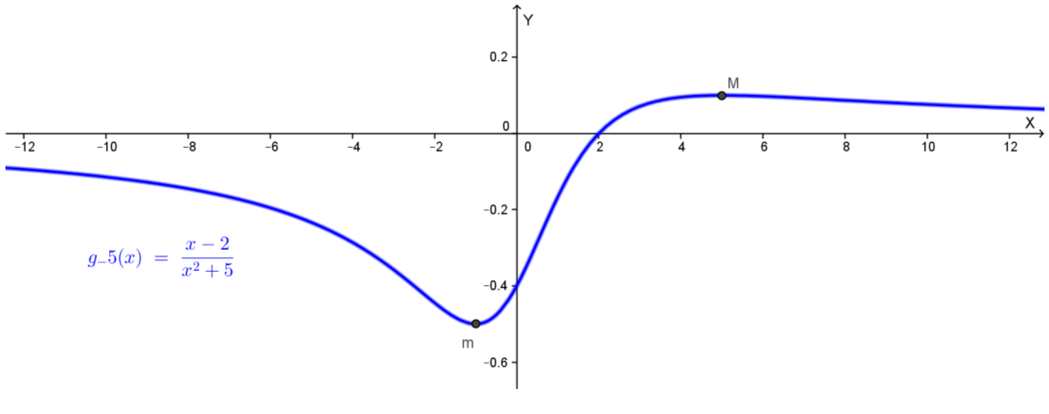
$$y' = \frac{x^2+5-(x-2)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2} \geq 0 \;\; se \;\; -x^2+4x+5 \geq 0,\;\; x^2-4x-5 \leq 0:$$

$-1 \leq x \leq 5$. Il grafico è quindi crescente per $-1 < x < 5$ e decrescente per $x < -1 \;\; vel \;\; x > 5$. Per $x = -1$ abbiamo un minimo relativo (e assoluto), che vale -1/2; per $x = 5$ abbiamo un massimo relativo (e assoluto), che vale 1/10.

Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{2(10-15x-6x^2+x^3)}{(x^2+5)^3}$$

che non è risolvibile elementarmente. Possiamo comunque affermare che il grafico ha tre flessi: uno per $x < -1$, uno per $-1 < x < 5$, uno per $x > 5$. Grafico:



Per $\lambda = 0$ abbiamo la funzione:

$$g_0 = \frac{x-2}{x^2}$$

La funzione è definita e continua per ogni x diverso da 0; nel dominio è positiva per x>2, taglia l'asse x in x=2 e non taglia l'asse y; ammette l'asintoto y=0 per $x \to \pm\infty$ e l'asintoto verticale x=0. Studiamo la derivata prima:

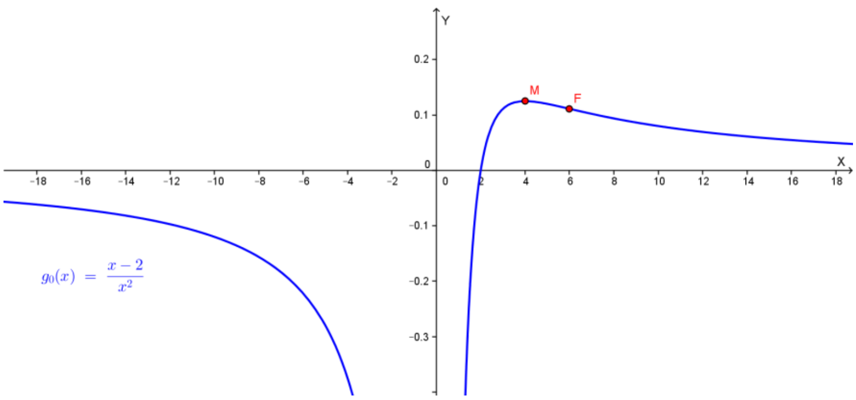
$$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{-x+4}{x^3} \geq 0 \quad se \quad 0 < x \leq 4;$$

Il grafico è quindi crescente $se \quad 0 < x < 4$ e decrescente $se \quad x < 0 \ \ vel \ \ x > 4.$
Non ci sono minimi relativi, per x=4 abbiamo un massimo relativo (e assoluto), che vale 1/8.

Studiamo la derivata seconda:

$$\frac{2(-6+x)}{x^4}$$

La derivata seconda (nel dominio della funzione) è positiva se x>6: per tali valori la concavità è verso l'alto, per x<0 vel 0<x<6 verso il basso; x=6 è un punto di flesso, con ordinata 1/9. Grafico:



Per $\lambda = 3$ abbiamo la funzione:

$$g_3 = \frac{x-2}{x^2-3}$$

La funzione è definita e continua per ogni x diverso da $\pm\sqrt{3}$; nel dominio è positiva per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \ \ or \ \ x > 2$, taglia l'asse x in x=2 e l'asse y in y=2/3; ammette l'asintoto y=0 per $x \to \pm\infty$ e gli asintoti verticali $x = \pm\sqrt{3}$. Studiamo la derivata prima:

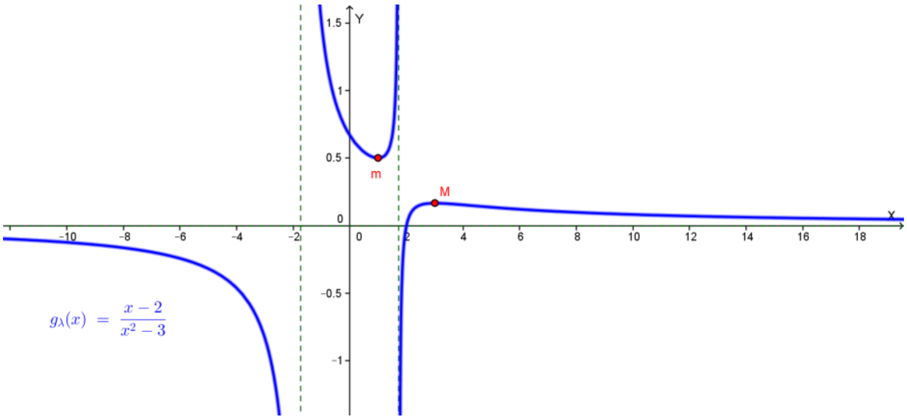
$$y' = \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-3)^2} \geq 0 \ \ (nel\ dominio)\ se\ x^2-4x+3 \leq 0: \ \ 1 \leq x \leq 3;$$

Il grafico è quindi crescente in $1 < x < \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < x < 3$.
Minimo relativo (ma non assoluto), per x=1 (valore 1/2), massimo relativo (ma non assoluto) per x=3 (valore 1/6).

Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{(-2x+4)(x^2-3)^2 - (-x^2+4x-3)2(x^2-3)(2x)}{(x^2-3)^4} = \frac{2(x^3-6x^2+9x-6)}{(x^2-3)^3}$$

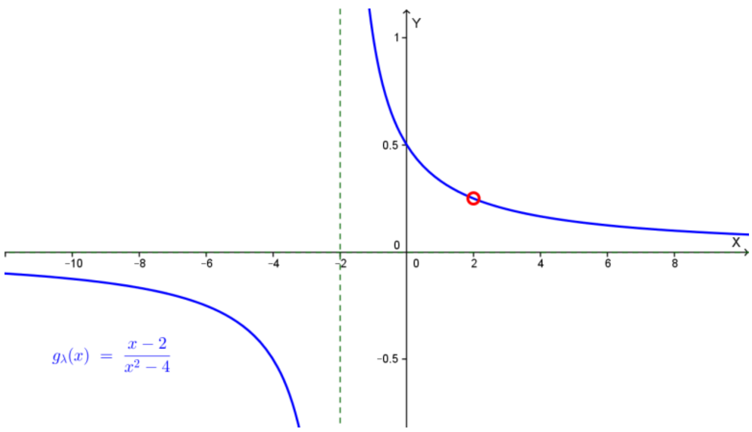
Il segno della derivata seconda non è immediato; possiamo comunque affermare che abbiamo sicuramente un flesso per x>3. Grafico:



Per $\lambda = 4$ abbiamo la funzione:

$$g_4 = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}, \quad con\ x \neq 2$$

Si tratta di una funzione omografica privata del punto (2;1/4), che ha centro in (-2; 0), asintoti x=-2 e y=0, che interseca l'asse y in 1/2. Grafico:



Per $\lambda = 9$ abbiamo la funzione:

$$g_9 = \frac{x-2}{x^2-9}$$

La funzione è definita e continua per ogni x diverso da ± 3; nel dominio è positiva per $-3 < x < 2 \;\; or \;\; x > 3$, taglia l'asse x in x=2 e l'asse y in y=2/9; ammette l'asintoto y=0 per $x \to \pm\infty$ e gli asintoti verticali $x = \pm 3$. Studiamo la derivata prima:

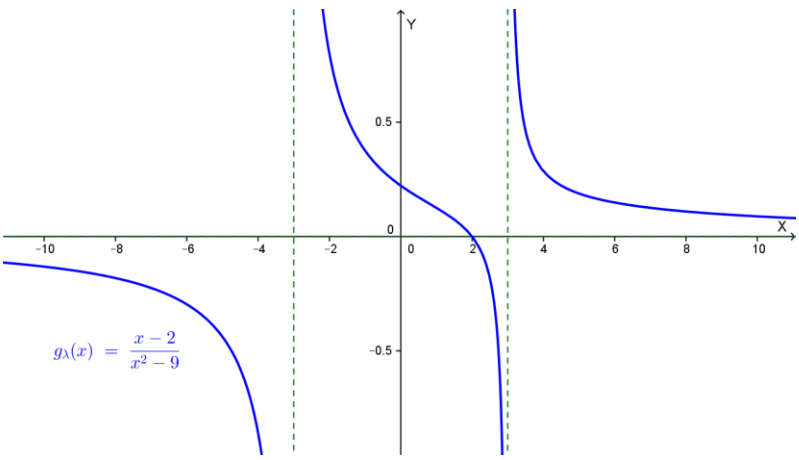
$$y' = \frac{x^2 - 9 - (x-2)(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2+4x-9}{(x^2-9)^2} \geq 0 \;\; (nel\ dominio)\ se\ x^2 - 4x + 9 \leq 0 : \;\; mai$$

La funzione è sempre decrescente (a tratti) nel dominio, non ci sono massimi e minimi.

Studiamo la derivata seconda:

$$y'' = \frac{(-2x+4)(x^2-9)^2 - (-x^2+4x-9)2(x^2-9)(2x)}{(x^2-9)^4} = \frac{2(x^3-6x^2+27x-18)}{(x^2-9)^3}$$

Il segno della derivata seconda non è immediato; possiamo comunque affermare che c'è sicuramente un flesso -3<x<3. Grafico:



2)

Stabilisci, al variare di λ in $\mathbb{R}$, se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di λ, qual è l'andamento della funzione g_λ, tracciandone un diagramma indicativo.

$$y = g(x) = \frac{x-2}{x^2 - \lambda}$$

Asintoti verticali

Se $\lambda < 0$: nessun asintoto verticale (la funzione è continua su tutto R).

Se $\lambda = 0$: 1 solo asintoto verticale, $x = 0$.

Se $\lambda 42$: 1 asintoto verticale, $x = -2$ (come già visto nel punto precedente)

Se $\lambda > 0 \;\; e \;\; \lambda \neq 4 :$ 2 asintoti verticali, $y = \pm\sqrt{\lambda}$

Massimi e minimi

Studiamo il segno della derivata prima:

$$g'(x) = \frac{x^2 - \lambda - (x-2)2x}{(x^2-\lambda)^2} = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2-\lambda)^2} \geq 0 \;\; se{:}\, -x^2 + 4x - \lambda \geq 0, x^2 - 4x + \lambda \leq 0 \; (1)$$

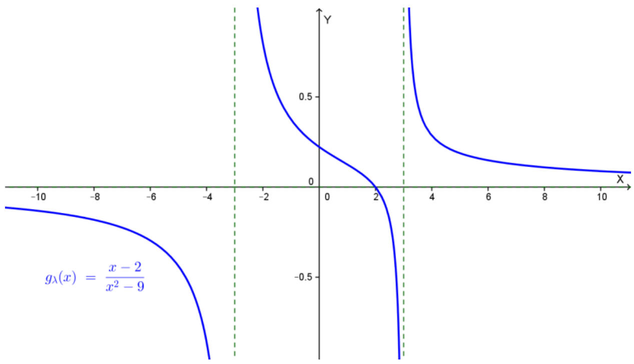
Studiamo il delta dell'equazione associata: $\frac{\Delta}{4} = 4 - \lambda$.
Se $4 - \lambda < 0$, $\lambda > 4$ la (1) non è mai verificata, quindi la funzione decresce (a tratti) sempre; in tal caso non ci sono massimi né minimi.

Se $4 - \lambda > 0$, $\lambda < 4 \; (ma\; \lambda \neq 0)$, la (1) è verificata per valori interni ad un intervallo, $2 - \sqrt{4-\lambda} < x < 2 + \sqrt{4-\lambda}$, quindi abbiamo un massimo relativo ed un minimo relativo.
Se $\lambda = 0$ la funzione ha equazione $g(x) = \frac{x-2}{x^2}$, che, come già visto, ha solo un massimo.

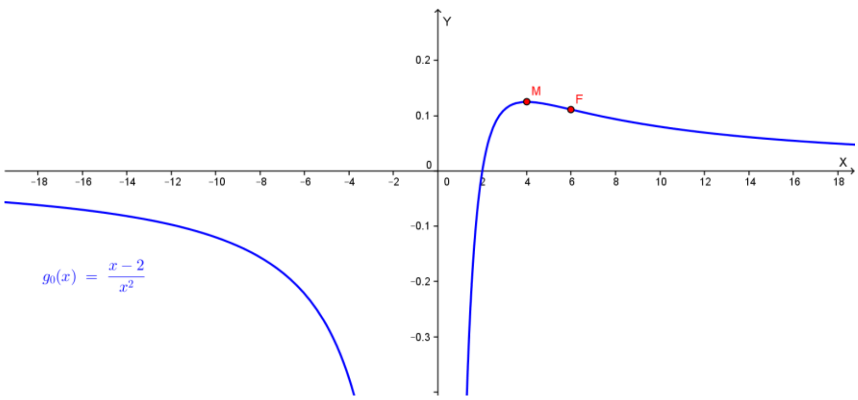
Se $4 - \lambda = 0$, $\lambda = 4$, la funzione ha equazione $y = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$, $\quad con\; x \neq 2$,
che, come già visto, non ha massimi né minimi.

I vari tipi di grafici di g sono i seguenti:

$\lambda > 4$: per esempio $\lambda = 9$

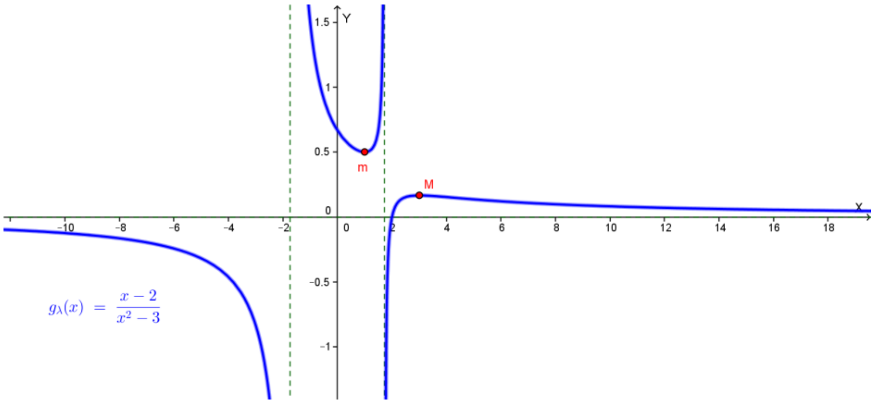


$\lambda = 0$

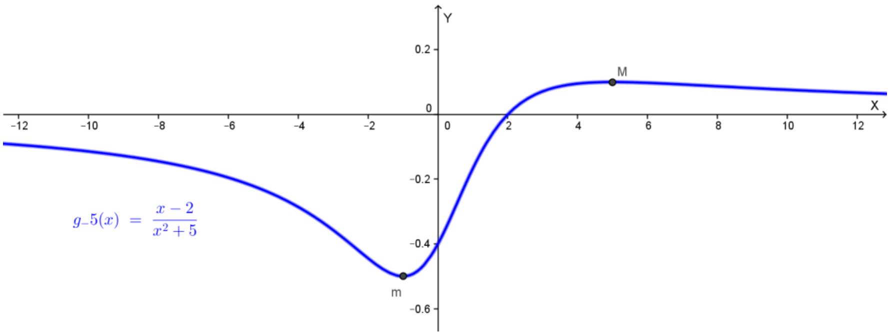


$\lambda < 4$ ($ma\ \lambda \neq 0$), $esempio\ \lambda = 3\ \ e\ \lambda = -5$:

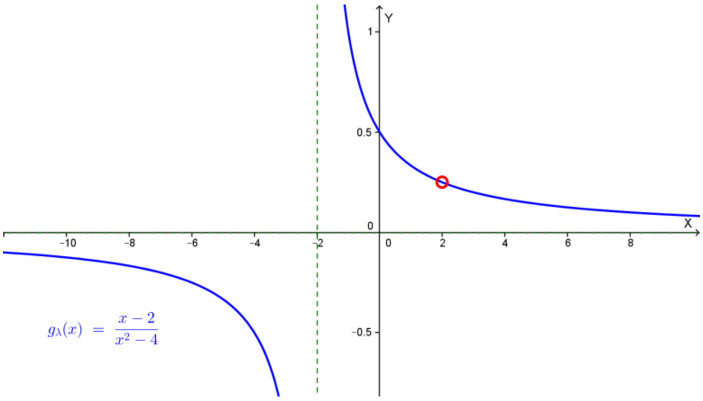
$0 < \lambda < 4$



$\lambda < 0$



$\lambda = 4$; $y = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$, $con\ x \neq 2$



[Animazione realizzata con Geogebra.]

3)

Dimostra che, per qualunque λ diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra Γ_λ e gli assi cartesiani è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla.

$$g_\lambda = \frac{x-2}{x^2-\lambda}, \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq 4$$

Osserviamo che, come già visto in precedenza, per $\lambda = 0$ e $\lambda = 4$ non abbiamo intersezioni con entrambi gli assi cartesiani.

Cerchiamo le intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0, y = \frac{2}{\lambda}$: $A = \left(0;\ \frac{2}{\lambda}\right)$, $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 4$
Se $y = 0, x = 2$: $B = (2;\ 0\ )$

La retta per A e B ha coefficiente angolare $\frac{2/\lambda}{-2} = -\frac{1}{\lambda} = m_{AB}$

Il punto di Γ_λ di ascissa nulla è $A = \left(0;\ \frac{2}{\lambda}\right)$, $\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 4$
La tangente in A ha coefficiente angolare $g'(0)$. Risulta;

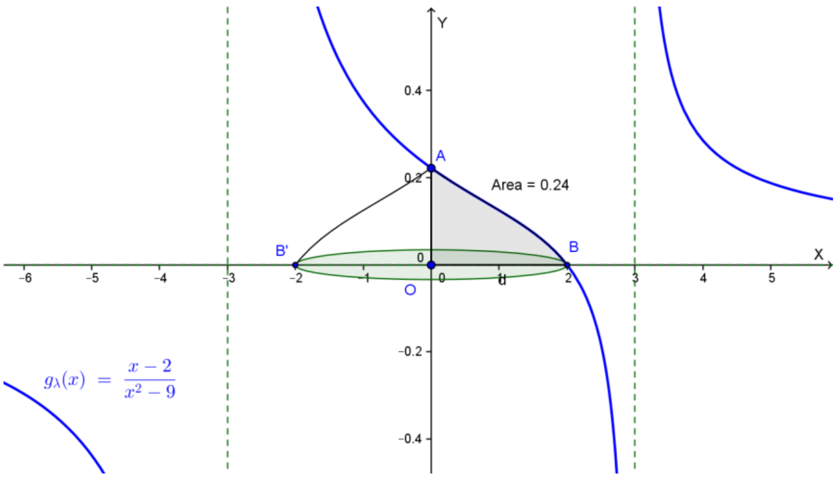
$$g'(x) = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2 - \lambda)^2}, \quad g'(0) = -\frac{1}{\lambda} = m_{AB}$$

Quindi la retta AB è tangente a Γ_λ nel suo punto di ascissa nulla per qualunque λ diverso da 0 da 4.

4)

Detti A e B i punti di intersezione tra Γ_9 e gli assi cartesiani, sia $\mathcal{G}$ la regione piana delimitata dai segmenti OA e OB e dall'arco di Γ_9 di estremi A e B. Determina l'area di $\mathcal{G}$ e il volume del solido generato dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y.

Riproduciamo il grafico di Γ_9 con la regione $\mathcal{G}$ indicata ed i punti $A = \left(0; \frac{2}{9}\right)$ e $B = (2; 0)$.



Calcoliamo l'area di $\mathcal{G}$:

$$Area(\mathcal{G}) = \int_0^2 \frac{x-2}{x^2-9}dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{x-2}{x^2-9}$:

$$\int \frac{x-2}{x^2-9}dx$$

Trasformiamo la funzione integranda:

$$\frac{x-2}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9} : \quad x-2 = x(A+B)+3A-3B \; da\; cui:$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-3B=-2 \end{cases}; \begin{cases} 3A+3B=3 \\ 3A-3B=-2 \end{cases}; \begin{cases} B=1-A \\ 6A=1 \end{cases}; \begin{cases} B=\frac{5}{6} \\ A=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-9}dx = \int \left(\frac{1/6}{x-3} + \frac{5/6}{x+3}\right)dx = \frac{1}{6}\ln|x-3| + \frac{5}{6}\ln|x+3| + c$$

$$Area(\mathcal{G}) = \int_0^2 \frac{x-2}{x^2-9}dx = \left[\frac{1}{6}\ln|x-3| + \frac{5}{6}\ln|x+3|\right]_0^2 = \frac{5}{6}ln5 - \left(\frac{1}{6}ln3 + \frac{5}{6}ln3\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{6}ln5 - ln3\right)\; u^2 \cong\; 0.24\; u^2 = Area(\mathcal{G})$$

Calcoliamo il volume generato dalla rotazione di $\mathcal{G}$ attorno all'asse y utilizzando il metodo dei gusci cilindrici. Si veda a tal proposito l'approfondimento alla pagina

http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf

$$V = 2\pi\int_0^2 x\cdot g(x)dx = 2\pi\int_0^2 x\cdot\frac{x-2}{x^2-9}dx = 2\pi\int_0^2\frac{x^2-2x}{x^2-9}dx = 2\pi\int_0^2\frac{x^2-9+9-2x}{x^2-9}dx =$$

$$= 2\pi\int_0^2 dx + 2\pi\int_0^2\frac{9-2x}{x^2-9}dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{9-2x}{x^2-9}$:

$$\frac{9-2x}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9} : \quad 9-2x = x(A+B)+3A-3B \; da\; cui:$$

$$\begin{cases} A+B=-2 \\ 3A-3B=9 \end{cases};\ \begin{cases} A+B=-2 \\ A-B=3 \end{cases};\ \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{5}{2} \end{cases};$$

$$\int \frac{9-2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-9}\,dx=\int\left(\frac{1/2}{x-3}+\frac{-5/2}{x+3}\right)dx=\frac{1}{2}ln|x-3|-\frac{5}{2}ln|x+3|+c$$

Pertanto:

$$V=2\pi\int_0^2 dx+2\pi\int_0^2\frac{9-2x}{x^2-9}\,dx=2\pi[x]_0^2+2\pi\left[\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{5}{2}\ln|x+3|\right]_0^2=$$

$$=4\pi+2\pi\left[-\frac{5}{2}ln5-\left(\frac{1}{2}ln3-\frac{5}{2}ln3\right)\right]=4\pi+2\pi\left(-\frac{5}{2}ln5+2ln3\right)=$$

$$=2\pi\left(2-\frac{5}{2}ln5+2ln3\right)\ u^3\cong 1.091\ u^3=V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria